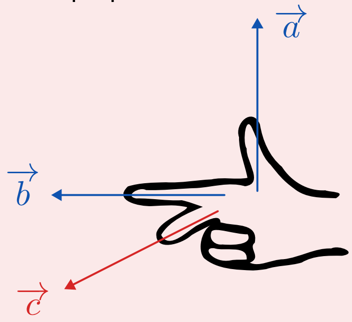
Produit vectoriel

Théorème : Caractéristiques du produit vectoriel

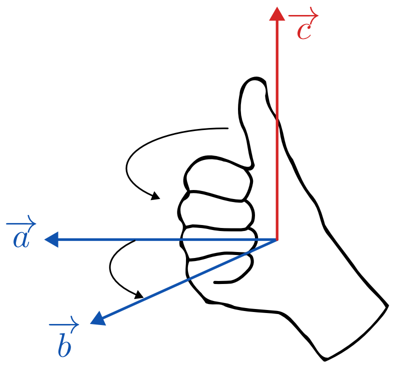
Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs et $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$. Alors $\vec{c}$ possèdent les propriétés suivantes :

- Il est orienté perpendiculairement au plan $(\vec{a}, \vec{b})$, son sens est donné par la **règle de la main droite** :
- En notant θ l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$, la norme de $\vec{c}$ est donnée par

$$||\vec{c}|| = ||\vec{a}|| \, ||\vec{b}|| \sin\theta$$



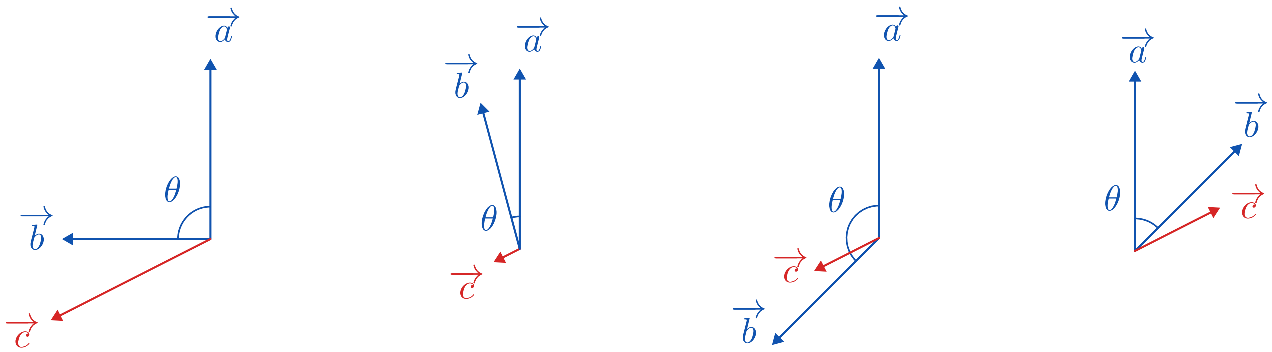
Remarque



La règle de la main droite peut être remplacée par le **tire-bouchon de Maxwell** : En reliant $\vec{a}$ vers $\vec{b}$ avec ses quatre derniers doigts, le pouce indique le sens de $\vec{a} \wedge \vec{b}$.

Exemple

Voici quelques exemples :



Propriété : Antisymétrie

Cela implique que le produit vectoriel est antisymétrique :

$$\vec{b} \wedge \vec{a} = -\vec{a} \wedge \vec{b}$$

Définition : Produit vectoriel en coordonnées cartésiennes

En coordonnées cartésiennes, il est facile d'exprimer les composantes d'un produit vectoriel :

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Remarque

Pour calculer la composante x, on cache les lignes x et on trace un lacet sur les quatre composantes restantes...

On fait de même pour les composantes y et z.

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ \end{pmatrix}$$

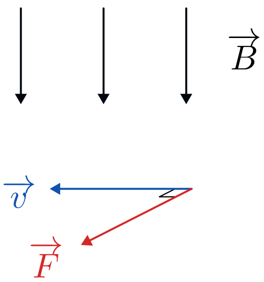
$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Exemple

En physique, le produit vectoriel intervient par exemple dans le calcul de la force magnétique subie par une particule chargée q en mouvement à la vitesse $\vec{v}$ dans un champ $\vec{B}$:

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Une conséquence directe est que cette force est orthogonale à la vitesse, elle poussera toujours le mouvement dans une nouvelle direction.



Propriété : Aire d'un parallélogramme

Un parallélogramme formé par des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ possède une aire

$$\mathcal{A} = ||\vec{a} \wedge \vec{b}||$$

Exemple

Quelques exemples :