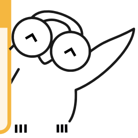
Mesures et incertitudes



Propriété : Écriture d'un résultat en physique

En sciences quand on donne un résultat expérimental, ce dernier doit toujours être accompagné d'une **incertitude**.

Remarque

Pour connaitre une incertitude, il y a deux cas possibles :

- soit on utilise un appareil dont le constructeur a spécifié l'incertitude, auquel cas on utilisera cette donnée ;
- ou sinon, il faudra l'évaluer soi-même.

Exemple

- On utilise une balance numérique dont la notice indique une précision de $0.01\,\mathrm{g}$. Si on lit la masse d'un échantillon comme $2.32\,\mathrm{g}$, alors il faudra écrire

$$m = \underset{\text{résultat}}{\underset{\uparrow}{2.32}} \pm \underset{\text{incertitude}}{\underset{\uparrow}{0.01}} \quad \mathrm{g}$$

- On un ampèremètre pour mesurer l'intensité du courant dans un circuit. Mais la valeur affichée n'est pas stable, elle oscille en gros entre $0.118\,\mathrm{A}$ et $0.124\,\mathrm{A}$:

On peut donc choisir comme valeur finale la moyenne 0.121 avec une incertitude de 0.003 :

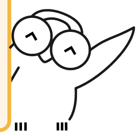
$$i = \underset{\text{résultat}}{\underset{\uparrow}{0.121}} \pm \underset{\text{incertitude}}{\underset{\uparrow}{0.003}} \quad \mathrm{A}$$

- Avec une règle, on mesure la taille d'un objet et on trouve $d = 10.1\,\mathrm{cm}$. Mais la graduation étant précise au millimètre près, on s'est peu être trompés d'un demi millimètre. On note donc :

$$d = \underset{\text{résultat}}{\underset{\uparrow}{10.10}} \pm \underset{\text{incertitude}}{\underset{\uparrow}{0.05}} \quad \mathrm{cm}$$

Propriété : Chiffres significatifs

- Une incertitude est toujours donnée avec un seul chiffre significatif.
- Un résultat est toujours donné avec comme dernier chiffre significatif, la décimale de l'incertitude.



Exemple

On remplit une grande éprouvette et on se sent de lire avec un bonne précision une volume de $36.4\,\mathrm{mL}$.

Mais le constructeur nous indique une précision de $1\,\mathrm{mL}$. Dans ce cas, l'incertitude va jusqu'à l'unité, donc tous les chiffres après, sont insignifiants dans le résultat. On note finalement

$$V = 36 \pm 1\,\mathrm{mL}$$

Propagation théorique des incertitudes

Lorsque qu'on calcule l'incertitude Δf d'une grandeur f, à partir d'un **produit** ou d'un **quotient** d'autres grandeurs x_i d'incertitudes Δx_i, on peut calculer :

$$\left(\frac{\Delta f}{f}\right)^2 = \sum_i \left(\frac{\Delta x_i}{x_i}\right)^2$$

Exemple

On mesure l'intensité i du courant traversant une résistance, ainsi que la tension u à ses bornes, on cherche à en déduire sa résistance :

$$\begin{cases} i = 24 \pm 2\,\mathrm{mA} \\ u = 5.1 \pm 0.1\,\mathrm{A} \end{cases} \implies R = \frac{u}{i} = 212.5\,\Omega \pm ??$$

Puisqu'on a un quotient de grandeurs, on peut écrire :

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 = \left(\frac{\Delta i}{i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta u}{u}\right)^2$$

$$\implies \Delta R = R\sqrt{\left(\frac{\Delta i}{i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta u}{u}\right)^2}$$

$$\Delta R = 18.19\ldots$$

Donc on écrit finalement

$$R = 0.21 \pm 0.02\,\mathrm{k}\Omega$$

Propager des incertitudes en python (méthode Monte-Carlo)

Admettons que l'on mesure k grandeurs x_i, accompagnées de leur incertitudes Δx_i. On veut calculer une nouvelle grandeur à partir de ces dernières :

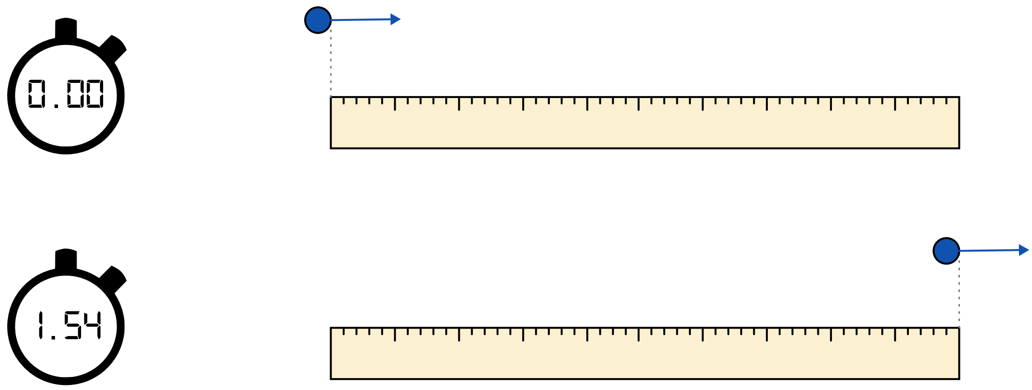
$$y = f(x_1, ..., x_k)$$

Pour déterminer l'incertitude de y, on va procéder ainsi :

1. Dans un fichier python, on définit chaque variable x_i et son incertitude Δx_i.
2. On simule un grand nombre N de nouvelles mesures des x_i, selon des distributions normales, centrées sur les valeurs réellement mesurées et d'écarts-types $\Delta x_i/2$.
3. On mène le calcul des N valeurs de y et on extrait le résultat grâce à la moyenne (`mean`) et son incertitude grâce à l'écart-type (`2 * std`).

✔ Exemple

Imaginons que l'on cherche à mesurer la vitesse d'une balle avec une règle et un chronomètre :



On mesure un temps $t = 1.54\,\mathrm{s}$ pour parcourir une distance $L = 1.00\,\mathrm{m}$. Le constructeur de la règle indique une incertitude $\Delta L = 1\,\mathrm{cm}$ et puisque la mesure du temps est faite à la main, on estime l'erreur d'environ $\Delta t = 0.1\,\mathrm{s}$.

1. On peut donc commencer un fichier Python :

```python
import numpy as np

t       = 1.54
L       = 1.00
Delta_t = 0.1
Delta_L = 0.01

```

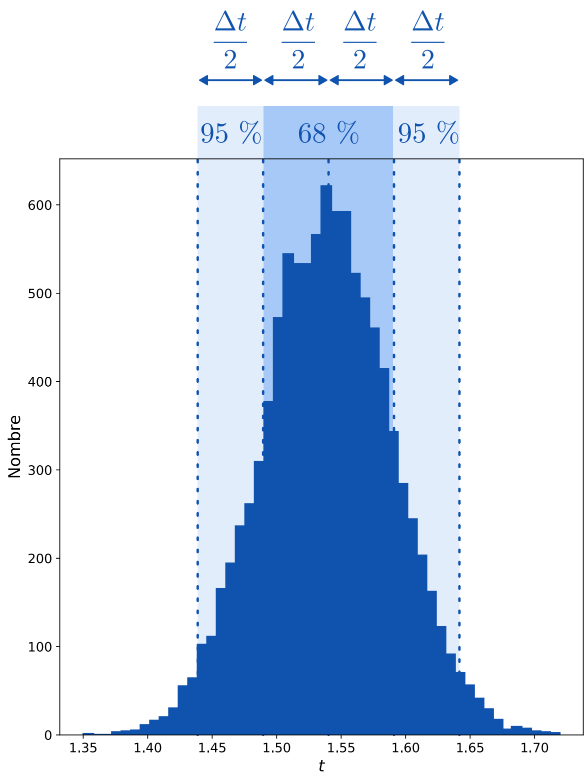
2. À présent, on simule 10 000 nouvelles expériences du même type :

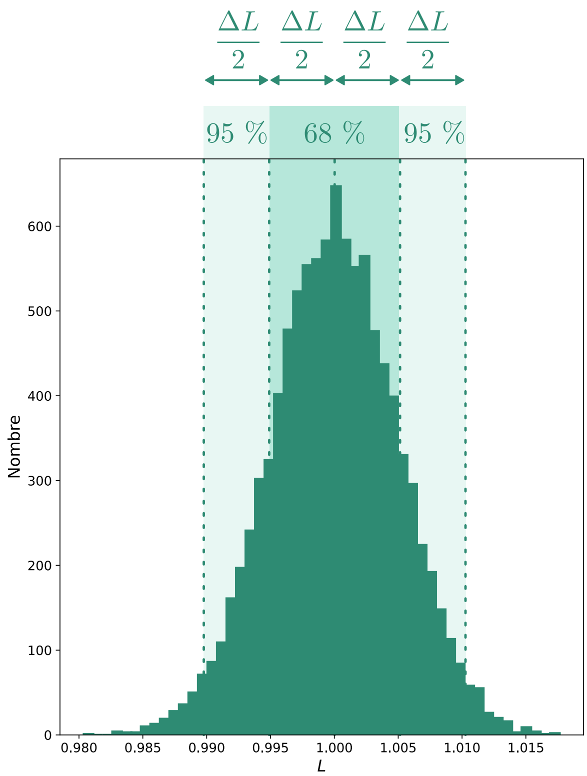
```python
N = 10000

simu_t = np.random.normal(t, Delta_t / 2, N)
simu_L = np.random.normal(L, Delta_L / 2, N)

```

On peut représenter les histogrammes des simulations ainsi obtenues :





On comprend pourquoi il faut un écart-type de ${}^{\Delta x_i}/_{2}$: l'incertitude sur notre résultat peut-être vue comme un intervalle de confiance à 95% par exemple. Un seul écart-type donne un intervalle de confiance à 68%, ce qui est trop faible par rapport à la situation physique.

3. On calcule la vitesse pour chacune des simulations, et on en déduit la valeur moyenne ainsi que l'incertitude :

```python
simu_v = simu_L / simu_t
print('Vitesse = ', simu_v.mean(), '±', 2 * simu_v.std())
```

Dans cet exemple, le résultat affiché est

```
>>> Vitesse =  0.6501605826042482 ± 0.04275015819323062
```

On peut donc en déduire l'écriture finale du résultat :

$$v = 0.65 \pm 0.04\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$