Équations différentielles

En physique, on obtient parfois des équations dont l'inconnu n'est pas un nombre, mais une fonction. Par exemple on pourrait se demander quelles sont les fonctions f égales à leurs dérivées :

$$f' = f$$

Définition : Équation différentielle à coefficients constants

Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnu est une fonction f. Cette équation fait intervenir f et ses dérivées $(f', f'', \ldots)$.

Lorsqu'elle se met sous la forme

$$a_0 f + a_1 f' + a_2 f'' + \ldots + a_n f^{(n)} = g$$

avec les a_i des coefficients constants et g une fonction quelconque, on dit qu'il s'agit d'une **équation différentielle à coefficients constants**.

Remarque

On se limitera à ce cas là dans tout le programme de prépa.

I Équation différentielle homogène

Définition : Équation différentielle homogène

Une équation différentielle est dite **homogène** si le terme de droite est nul :

$$a_0 f + a_1 f' + a_2 f'' + \ldots + a_n f^{(n)} = 0$$

A Premier ordre

Définition : Équation différentielle du premier ordre

Une équation différentielle est dite **du premier ordre** lorsque qu'elle ne fait intervenir que f et f'.

Remarque

Ainsi une équation différentielle homogène du premier ordre s'écrit

$$a_0 f + a_1 f' = 0$$

Et on peut simplifier en divisant par a_1 et en notant $a = {}^{a_0}/_{a_1}$:

$$\boxed{f' + af = 0}$$

Théorème : Solutions d'une équation différentielle homogène d'ordre 1

Toutes les solutions de l'équation
$$f' + af = 0$$
Se mettent sous la forme
$$f : t \longrightarrow \lambda\, e^{-at}$$
Avec $\lambda \in \mathbb{R}$ qui peut prendre n'importe quelle valeur *a priori*

Démo

On part de la solution : $f(t) = \lambda\, e^{-at}$ et on vérifie :
$$f'(t) = -a\lambda\, e^{-at} = -af(t)$$
$$\implies f' + af = 0$$

Propriété : Conditions initiales

Lorsque l'on donne une **condition initiale** sur f, ceci fixe la valeur de λ.

Exemple

En imposant par exemple $f(0) = 1$, en reprenant l'expression de la solution ,on a
$$\lambda\, e^{-a\times 0} = 1 \implies \lambda = 1$$
Donc dans ce cas la solution unique est
$$f(t) = e^{-at}$$

B Deuxième ordre

Définition : Équation différentielle du deuxième ordre

Une équation différentielle est dite **du deuxième ordre** lorsque qu'elle ne fait intervenir que f, f' et f''.

Remarque

Ainsi une équation différentielle homogène du premier ordre s'écrit
$$\boxed{af'' + bf' + cf = 0}$$

Théorème : Solutions d'une équation différentielle homogène d'ordre 1

Pour trouver toutes les solutions de l'équation

$$af'' + bf' + cf = 0$$

Il faut définir le **polynôme caractéristique** de l'équation

$$P(X) = aX^2 + bX + c$$

et chercher ses racines (en passant par le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$).

- $\mathbf{\Delta > 0}$ Les racines sont réelles :

$$r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

  Et les solutions de l'équation différentielle de la forme

$$f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$$

- $\mathbf{\Delta = 0}$ La racine est réelle :

$$r_0 = \frac{-b}{2a}$$

  Et les solutions de l'équation différentielle de la forme

$$f(t) = (\lambda t + \mu)\, e^{r_0 t}$$

- $\mathbf{\Delta < 0}$ Notons

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \qquad \omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

  Les racines sont alors $r_1 = \alpha + i\omega$ et $r_2 = \alpha - i\omega$ De sorte que les solutions de l'équation différentielle se mettent de la forme

$$f(t) = e^{\alpha t}\left(\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)\right)$$

Dans chacun des cas, λ et μ peuvent être n'importe quel réel.

Démo

- $\mathbf{\Delta > 0}$ Partons la solution donnée :

$$\begin{aligned} f(t) &= \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \\ f'(t) &= r_1 \lambda e^{r_1 t} + r_2 \mu e^{r_2 t} \\ f''(t) &= {r_1}^2 \lambda e^{r_1 t} + {r_2}^2 \mu e^{r_2 t} \end{aligned}$$

  Donc

$$af''(t) + bf'(t) + cf(t) = \lambda(a{r_1}^2 + br_1 + c)\, e^{r_1 t} + \mu(a{r_2}^2 + br_2 + c)\, e^{r_2 t}$$

  Or r_1 et r_2 sont les racines du polynôme $P(X) = aX^2 + bX + c$, donc

$$a{r_1}^2 + br_1 + c = a{r_2}^2 + br_2 + c = 0$$

  Et on a alors bien

$$af''(t) + bf'(t) + cf(t) = 0$$

- $\boldsymbol{\Delta = 0}$ Partons la solution donnée :

$$f(t) = (\lambda t + \mu)\, e^{r_0 t}$$
$$f'(t) = (\lambda r_0 t + r_0 \mu + \lambda)\, e^{r_0 t}$$
$$f''(t) = (\lambda {r_0}^2 t + {r_0}^2 \mu + 2 r_0 \lambda)\, e^{r_0 t}$$

Donc

$$a f''(t) + b f'(t) + c f(t) = \lambda(a{r_0}^2 + b r_0 + c) + \mu(a{r_0}^2 + b r_0 + c) + \lambda(2 a r_0 + b))\, e^{r_0 t}$$

Or r_0 est racine du polynôme caractéristique donc

$$a{r_0}^2 + b r_0 + c = 0$$

Et de plus

$$r_0 = -\frac{b}{2a} \implies 2 a r_0 + b = 0$$

Ainsi on a bien

$$a f''(t) + b f'(t) + c f(t) = 0$$

- $\boldsymbol{\Delta < 0}$ On reprend le raisonnement qui nous a mené au premier cas :

$$f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$$

La preuve fonctionne toujours et nous aurons bien, avec cette forme

$$a f'' + b f' + c f = 0$$

⚠ Ici $\lambda, \mu \in \mathrm{C}$ *a priori* ! Décomposons les en parties réelles et imaginaires :

$$\lambda = \lambda' + i\lambda'' \qquad \mu = \mu' + i\mu''$$

Montrons alors que cette forme est équivalente à celle donnée dans le théorème :

$$f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$$
$$f(t) = \lambda e^{(\alpha + i\omega)t} + \mu e^{(\alpha - i\omega)t}$$
$$f(t) = \lambda e^{\alpha t} e^{i\omega t} + \mu e^{\alpha t} e^{-i\omega t}$$
$$f(t) = e^{\alpha t} \left(\lambda\, e^{i\omega t} + \mu e^{-i\omega t}\right)$$

Or l'équation différentielle est entièrement réelle. Il ne peut donc pas y avoir de partie imaginaire à la solution, ainsi :

$$f(t) = \mathrm{Re} f(t)$$
$$f(t) = e^{\alpha t} \left(\lambda' \cos(\omega t) - \lambda'' \sin(\omega t) + \mu' \cos(-\omega t)) - \mu'' \sin(-\omega t)\right)$$
$$f(t) = e^{\alpha t} \left((\lambda' + \mu') \cos(\omega t) + (\mu'' - \lambda'') \sin(\omega t)\right)$$

On peut renommer

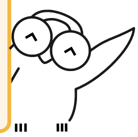
$$\lambda' + \mu' \to \lambda \in \mathbb{R}$$
$$\mu'' - \lambda'' \to \mu \in \mathbb{R}$$

Et ainsi on a bien

$$f(t) = e^{\alpha t} \left(\lambda \cos \omega t + \mu \sin \omega t\right)$$

Propriété : Conditions initiales

Lorsque l'on donne une **condition initiale** sur f, ceci fixe la valeur de λ. Puisqu'il y a deux paramètres à déterminer, il faut deux équations : une sur f et une sur sa dérivée **au même moment)**.



Exemple

Prenons le cas $\Delta < 0$ avec

$$f(0) = 0$$
$$f'(0) = 1$$

Alors la première équation donne

$$e^0(\lambda \cos(0) + \mu \sin(0)) = 0 \implies \lambda = 0$$

Donc on peut simplifier

$$f(t) = \mu e^{\alpha t} \sin(\omega t)$$
$$f'(t) = \mu e^{\alpha t}(\alpha \sin(\omega t) + \cos(\omega t))$$

Et de même pour la deuxième

$$f'(0) = 1 \implies \mu = 1$$

Donc la solution unique est

$$f(t) = e^{\alpha t} \sin(\omega t)$$