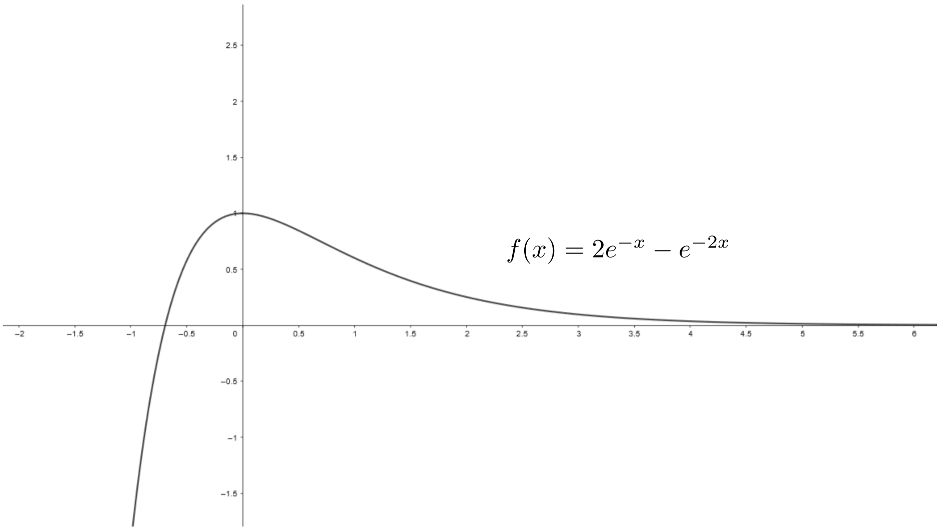
Développements limités

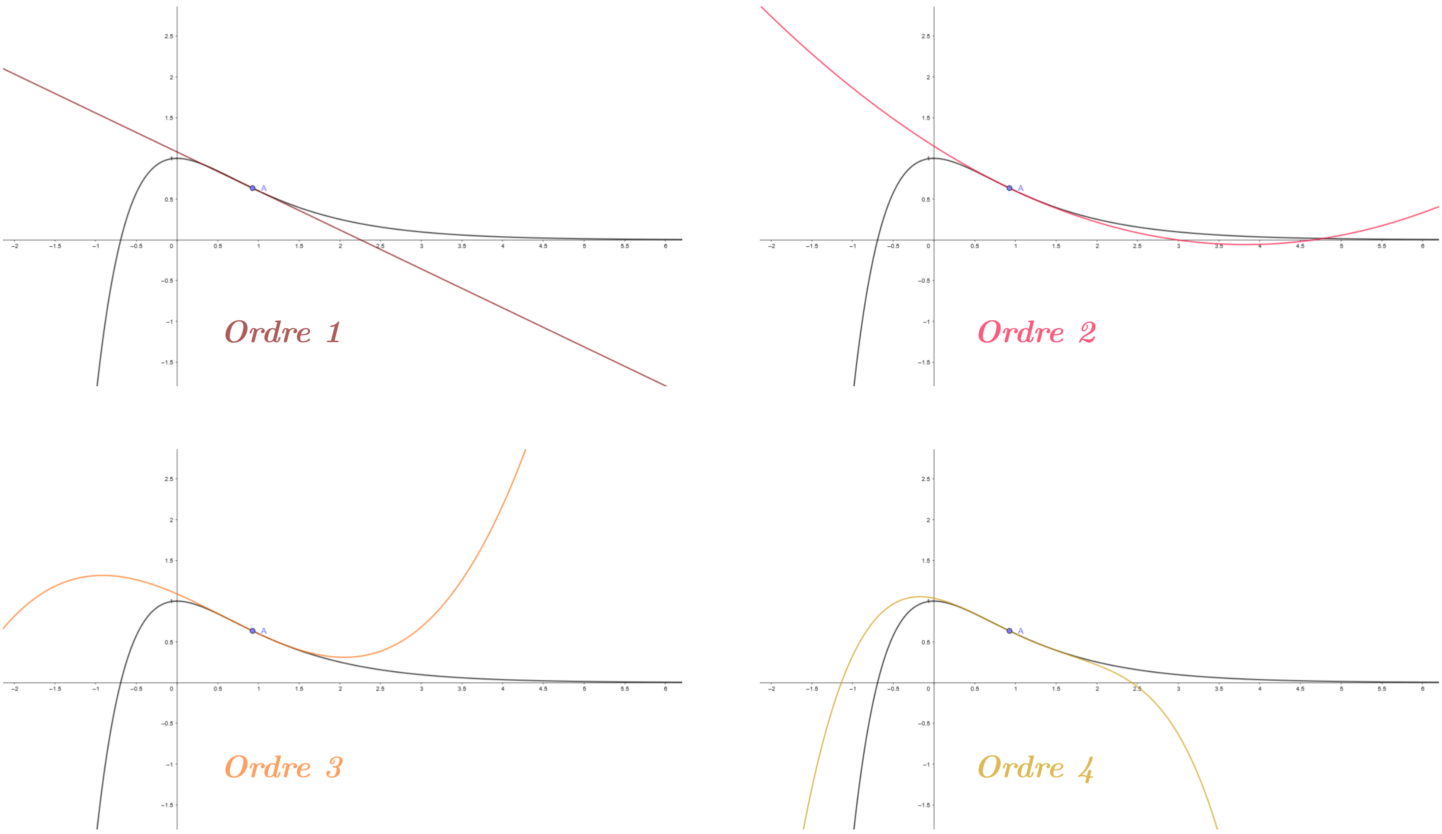
En physique, on est parfois amené · es à manipuler des fonctions complexes. Pouvant introduire des difficultés analytiques. Par exemple supposons que l'on est une énergie potentielle de la forme



Les équations du mouvement qui en résultent se sont pas solvables, car hautement non-linéaires :

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + f(x) = \text{cste}$$
$$\Leftrightarrow \dot{x}\ddot{x} + \dot{x}f'(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \ddot{x} + f'(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \ddot{x} + 2(e^{-2x} - e^{-x}) = 0$$

Heureusement, on peut approximer n'importe quelle fonction $\mathcal{C}^\infty$ autour d'un point $x = a$ par un polynôme de degré que l'on choisit. On parle alors de **développement limité** à l'ordre n de f en a :



Théorème : Développement limité d'une fonction en un point

Le **développement limité** à l'ordre n d'une fonction f en un point a s'exprime par le polynôme :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)\,(X-a)^k$$

Remarque

- Le développement limité à l'ordre 0 est simplement une fonction constante

$$f(x) = f(a)$$

- Le développement limité à l'ordre 1 donne la tangente à la courbe en $x = a$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

- **Un développement limité approxime bien la fonction pour lorsque x est proche de a !**
- Plus on va à un ordre élevé, plus le développement limité est une bonne approximation de la courbe.
- On parle aussi de développement de Taylor, ou encore de série de Taylor.

Exemple

- Pour la fonction exponentielle, c'est facile car toutes ses dérivées sont égales à elle-même :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \exp^{(k)} = \exp$$

Donc le développement de Taylor en $x = 0$ donne :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

- À partir de la formule d'Euler $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, on peut retrouver les développements limités des fonctions trigonométriques en $x = 0$:

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \dots$$
$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)$$

Donc par identification des parties réelle et imaginaire,

$$\begin{cases} \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dots \\ \sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dots \end{cases}$$

On peut faire plusieurs remarques :

  - Le développement de la fonction cosinus n'est constitué que de terme de puissances paires. Ce qui est cohérent avec le fait que la fonction soit paire :

$$\cos(-x) = \cos x$$

  - Le développement de la fonction sinus n'est constitué que de terme de puissances impaires. Ce qui est cohérent avec le fait que la fonction soit impaire :

$$\sin(-x) = -\sin x$$

  - À l'ordre 1, on retrouve l'approximation des petits angles, que l'on a l'habitude de faire :

$$\sin x \simeq x$$