Dérivées partielles

I Fonctions à plusieurs variables

Cette année, nous allons être amené · es à étudier de plus en plus de **fonctions à plusieurs variables**. Prenons des exemples très simples :

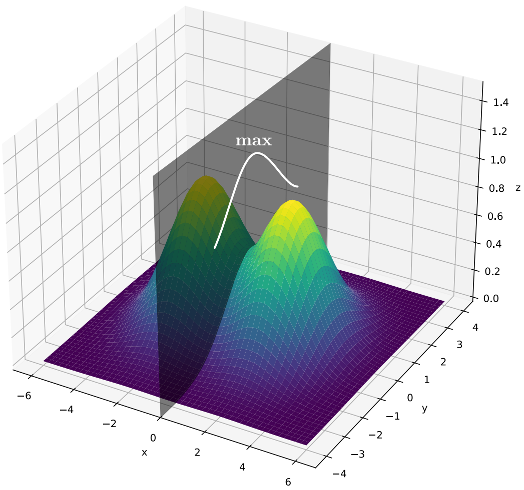
Exemple

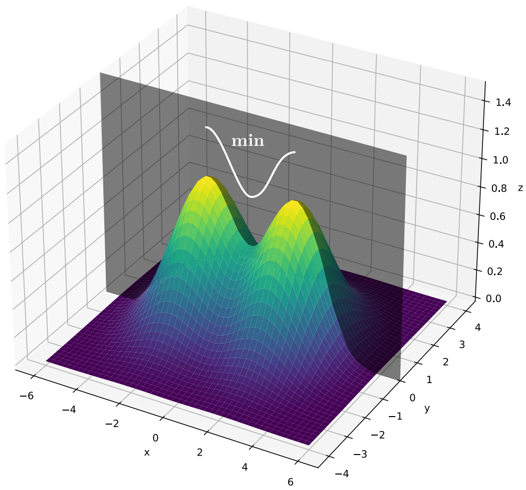
- Prenons un randonneur qui évolue dans la montagne. On peut repérer sa position sur une carte avec des coordonnées cartésiennes (x, y), et associer à chaque position une altitude $h(x, y)$. Donc h est une fonction à deux variables x et y.
$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
- Considérons un satellite de masse m plongé dans le champ de pesanteur terrestre $E_p(\overrightarrow{r})$ (dépendant de sa position $\overrightarrow{r}$). On peut définir son énergie mécanique
$$E_m(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{v}) = \frac{1}{2} m \overrightarrow{v}^2 + E_p(\overrightarrow{r})$$
Donc et comme la position et la vitesse sont eux mêmes des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, alors E_m est une fonction à six variables !
$$E_m : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}$$
- Un cas récurrent sera de prendre une (ou plusieurs !) variable · s spatiale · s et une variable temporelle. Par exemple si on fait propager une onde le long d'une corde en soulevant d'un coup sec une extrémité, on pourra s'intéresser à la hauteur de celle-ci h en fonction de la distance à l'extrémité x et du temps t écoulé. Donc $h(x, t)$ a deux variables.

II Différentiation

A Dérivées partielles

Le fait de dépendre de plusieurs variables induit des propriétés particulières pour l'analyse de la fonction. En particulier, les notions de maximum ou minimum prennent un autre sens… Dans le graphique ci-dessous, on reprend l'exemple du randonneur qui passe un col. Dans la direction y, celui-ci est un maximum, mais dans la direction y il s'agit d'un minimum !





Ainsi, la notion de dérivée elle-même doit être redéfinie… En fait l'exemple précédent nous fait bien comprendre que la dérivée doit être définie pour chaque variable, indépendamment l'une de l'autre.

Définition : Dérivée partielle

Soit f une fonction à plusieurs variables. On appelle **dérivée partielle de f par rapport à une variable** x la dérivée de f en considérant que toutes les autres variables sont fixées. On la note

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

✔ Exemple

Prenons la fonction

$$f(x, y) = xy^2$$

Alors on a les dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$$

Ainsi il devient possible d'avoir un point qui soit à la fois un maximum et un minimum selon la variable par rapport à laquelle on dérive !

B Différentiel d'une fonction à plusieurs variables

Définition : Différentiel d'une fonction à plusieurs variables

Soit un fonction f dépendant de plusieurs n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$. Alors on peut écrire son différentiel ainsi :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n$$

✔ Exemple

En thermodynamique, le volume d'un gaz parfait dépend de la quantité de matière n, de sa température T et de sa pression p :

$$V = \frac{nRT}{p}$$

Ainsi le changement d'un de ces paramètre entraînera la variation de V :

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{RT}{p} \qquad ; \qquad \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{nR}{p} \qquad ; \qquad \frac{\partial V}{\partial p} = -\frac{nRT}{p^2}$$

Donc en effectuant une variation infinitésimale de chacun de ces paramètre $\mathrm{d}n$, $\mathrm{d}T$ et $\mathrm{d}p$, le volume varie selon trois termes :

$$\mathrm{d}V = \underbrace{\frac{\partial V}{\partial n}\,\mathrm{d}n}_{\substack{\text{variation de } V\\ \text{due à celle de } n}} + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial T}\,\mathrm{d}T}_{\substack{\text{variation de } V\\ \text{due à celle de } T}} + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial p}\,\mathrm{d}p}_{\substack{\text{variation de } V\\ \text{due à celle de } p}}$$

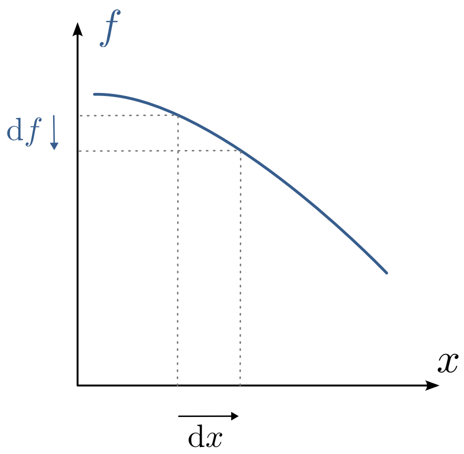
$$\mathrm{d}V = \frac{R}{p}\left(T\,\mathrm{d}n + n\,\mathrm{d}T - \frac{nT}{p}\,\mathrm{d}p\right)$$

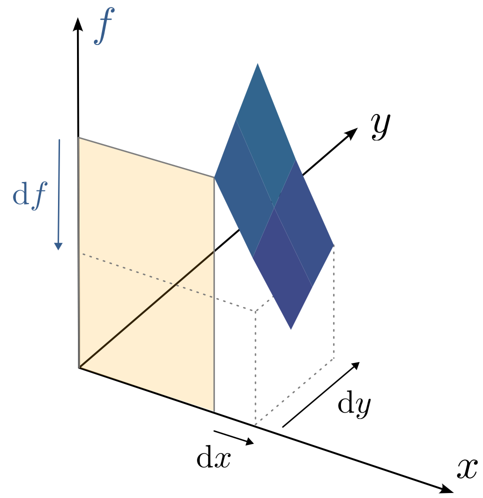
Remarque

Pour une fonction à une variable $f(x)$, on pouvait écrire une relation simple pour une évolution infinitésimale :

$$\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

Ce qui traduisait à quel point f varie lorsque l'on fait bouger x de $\mathrm{d}x$. À présent la relation est généralisable : en faisant bouger toutes les variables de quantités infinitésimales, on pondère chaque variation par un coefficient directeur $\partial f/\partial x_i$ et on additionne le tout pour trouver la variation de f.





Dans les exemples représentés ci-dessus, la variation de f est négative : $\mathrm{d}f \leq 0$.

III Gradient

Définition : Gradient d'un champ scalaire

Pour tout un champ scalaire $s : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, on peut associer un champ vectoriel $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, s$: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ appelé **gradient de** s définit ainsi dans le coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, s = \frac{\partial s}{\partial x}\,\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial s}{\partial y}\,\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial s}{\partial z}\,\overrightarrow{e_z} = \begin{pmatrix} \partial_x s \\ \partial_y s \\ \partial_z s \end{pmatrix}$$

Ce champ s'interprète ainsi en un point M :

Sa direction indique comment suivre l'augmentation de s autour de M

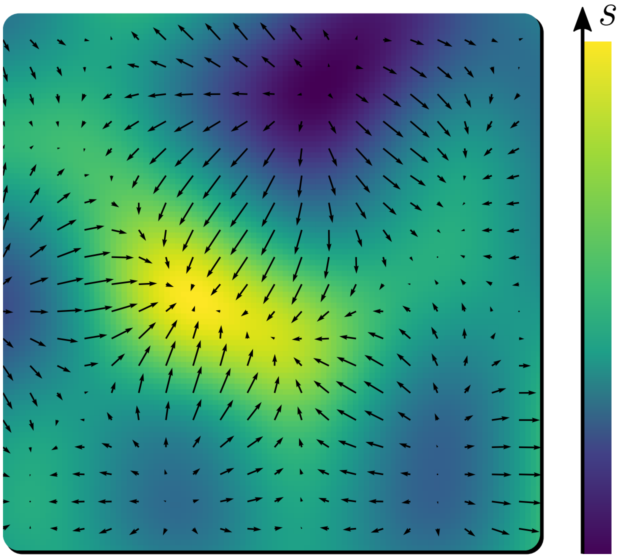
Sa norme indique l'intensité avec laquelle s varie dans cette direction

Remarque

On peut définir également le gradient en 2D :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, s = \frac{\partial s}{\partial x}\,\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial s}{\partial y}\,\overrightarrow{e_y}$$

Exemple



Dans l'exemple ci-dessus le champ scalaire s est représenté en couleur et le gradient correspond aux flèches noires. Pour rendre cela plus concret, on peut dire qu'il s'agit d'un carte indiquant les reliefs, donc $s(x, y)$ est la hauteur au point (x, y). On voit bien que

- Le gradient pointe toujours vers le sens de la montée
- Plus la montée est raide, plus la norme du gradient est élevée (en haut des collines et en bas des vallées, les vecteurs sont quasi nuls)

Remarque

Le choix de s n'est pas unique, on peut le prendre comme on veut à une constante près, puisque $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$ n'est définie qu'avec des dérivées :

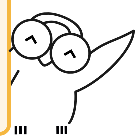
$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(s + \mathrm{cste}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, s$$

Propriété : Gradient et différentiel

On peut se servir du gradient pour définir le différentiel d'un champ scalaire :

$$\mathrm{d}s = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, s \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}$$

Avec $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}x\,\overrightarrow{e_x} + \mathrm{d}y\,\overrightarrow{e_y} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_z}$



Démo

$$\mathrm{d}s = \partial_x s\,\mathrm{d}x + \partial_y s\,\mathrm{d}y + \partial_z s\,\mathrm{d}z \qquad \text{(Définition d'un différentiel)}$$
$$\mathrm{d}s = (\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, s) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} \qquad \text{avec} \quad \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}x\,\overrightarrow{e_x} + \mathrm{d}y\,\overrightarrow{e_y} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_z}$$

Exemple

Lorsqu'une force est conservative, on peut définir son énergie potentielle $E_p(x, y, z)$ telle que :

$$\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, E_p$$

Alors le travail élémentaire δW peut s'écrire

$$\delta W = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, E_p \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = -\mathrm{d}E_p$$

Le travail provient seulement du fait que le système se soit déplacé dans un champ d'énergie potentielle. Il ne dépend donc plus du chemin suivi, seuls comptent les points de départ et d'arrivée.