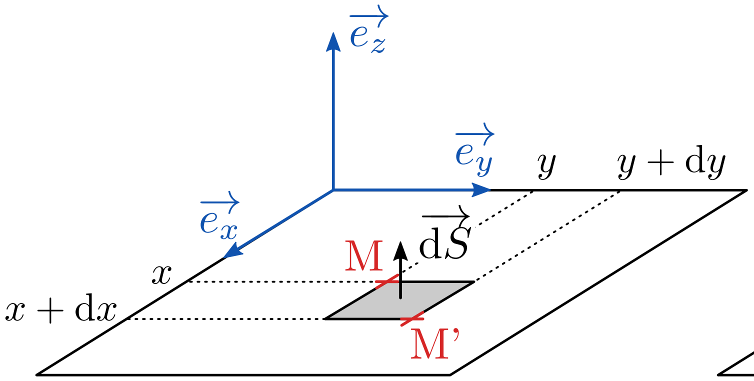
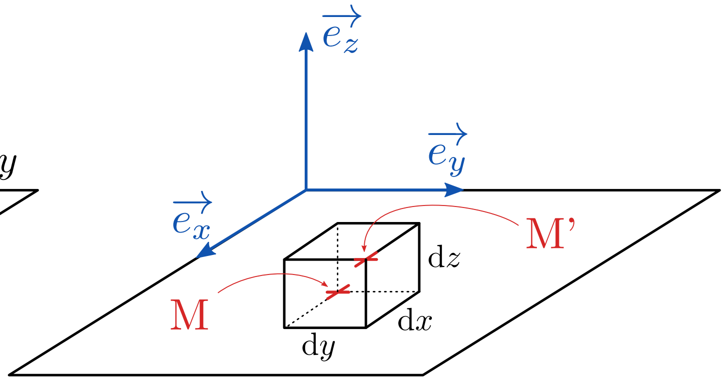
Éléments de surface / volume et systèmes de coordonnées

Méthode

Pour exprimer un élément de surface ou de volume dans un système de coordonnées en un point M, on déplace ce point de façon infinitésimale selon les coordonnées qui nous intéressent et on relève la forme géométrique ainsi tracée.

I Coordonnées cartésiennes





A Élément de surface

On s'intéresse à la surface plane $\mathcal{S} : z = z_0$. Prenons le point $\mathrm{M} = (x, y, z_0)$ dans cette surface et déplaçons-le infinitésimalement en restant dans la surface considérée : $\mathrm{M}' = (x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y, z_0)$. On trace alors un petit rectangle d'aire $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Donc l'élément de surface s'exprime

$$\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\overrightarrow{e_z}$$

Remarque

Le raisonnement est le même si on choisit les autres plans (Oyz) ou (Oxz).

B Élément de volume

On procède de même, mais cette fois-ci on déplace également le point selon la troisième coordonnée, vers $\mathrm{M}' = (x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y, z + \mathrm{d}z)$. Cette manipulation trace alors un élément de volume

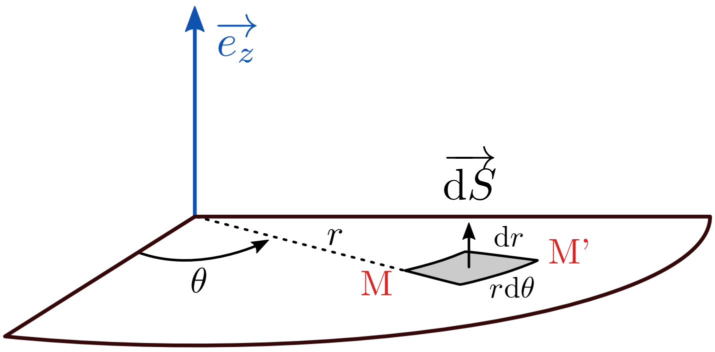
$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

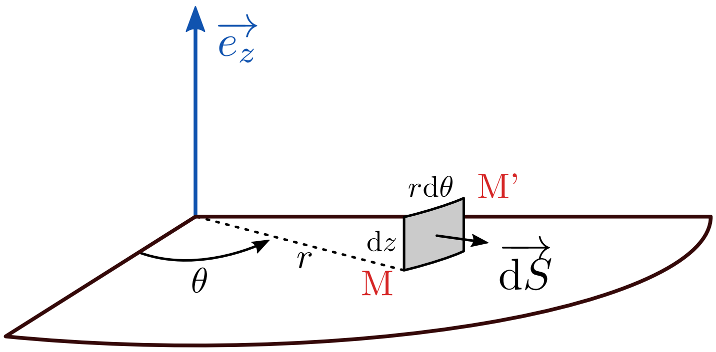
Remarque

Dans chacun des cas précédents, le résultat est homogène. En effet, $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}z$ sont des longueurs donc $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\overrightarrow{e_z}$ est bien une surface et $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ un volume.

II Coordonnées cylindriques

A Élément de surface





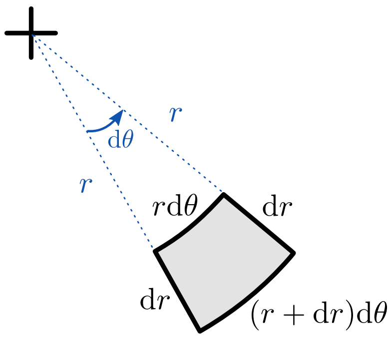
A.1 Section du cylindre

Dans ces coordonnées, passer du point $\mathrm{M} = (r, \theta, z_0)$ au point $\mathrm{M}' = (r + \mathrm{d}r, \theta + \mathrm{d}\theta, z_0)$ trace un petit rectangle (voir première remarque) de côtés $\mathrm{d}r$ et $r\mathrm{d}\theta$. Donc l'élément de surface associé est

$$\overrightarrow{\mathrm{d}S} = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{e_z}$$

Remarque

La forme tracée n'est pas vraiment un rectangle, c'est plutôt un bout d'anneau d'épaisseur $\mathrm{d}r$ et d'angle $\mathrm{d}\theta$.



Les deux bords droits mesurent $\mathrm{d}r$ et les bords arrondis respectivement $r\mathrm{d}\theta$ et $(r + \mathrm{d}r)\mathrm{d}\theta = r\mathrm{d}\theta + \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$. Si on veut s'arrêter un premier ordre du développement limité, cette dernière longueur est finalement la même que la première : $r\mathrm{d}\theta$. Ce qui justifie l'approximation à un rectangle.

$$\underbrace{\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}_{\text{deuxième ordre}} = o(r\mathrm{d}\theta)$$

Remarque

Attention ici $\mathrm{d}\theta$ est un angle donc une grandeur sans dimension. Il faut donc bien r dans le résultat pour avoir une surface à la fin.

A.2 Contour du cylindre

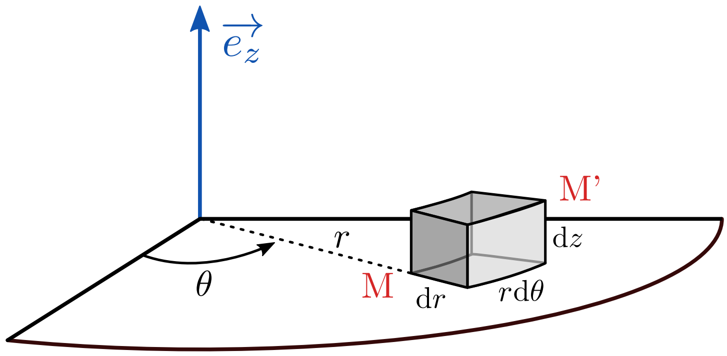
Ici on a à nouveau une forme que l'on peut approximer à un rectangle de côtés $r\mathrm{d}\theta$ et $\mathrm{d}z$ (voir schéma ci-dessus) donc

$$\overrightarrow{\mathrm{d}S} = r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_r}$$

Remarque

Attention à l'orientation : cette fois-ci la vecteur perpendiculaire est dirigé selon $\overrightarrow{e_r}$

B Élément de volume



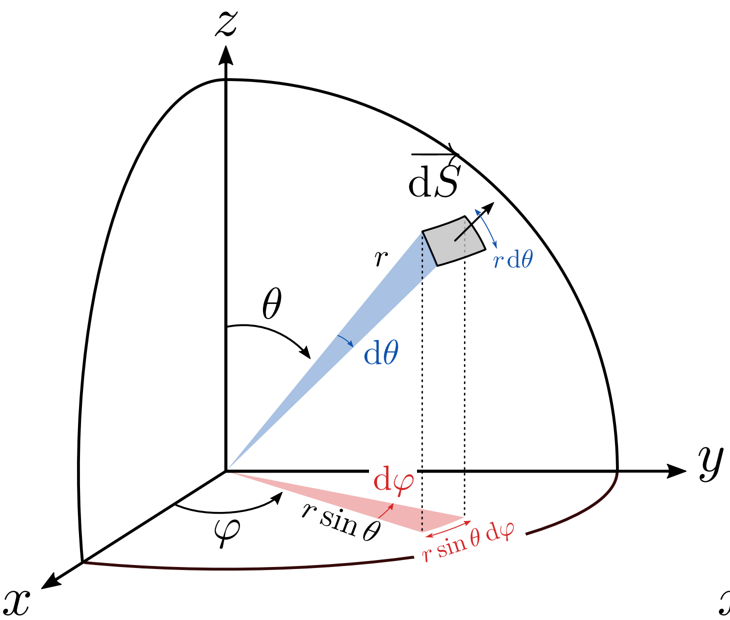
En combinant les raisonnements précédents, lorsque l'on fait varier infinitésimalement toutes coordonnées $\mathrm{M}' = (r + \mathrm{d}r, \theta + \mathrm{d}\theta, z + \mathrm{d}z)$, on dessine un petit cube (au premier ordre) de côtés $\mathrm{d}r$, $r\mathrm{d}\theta$ et $\mathrm{d}z$ donc

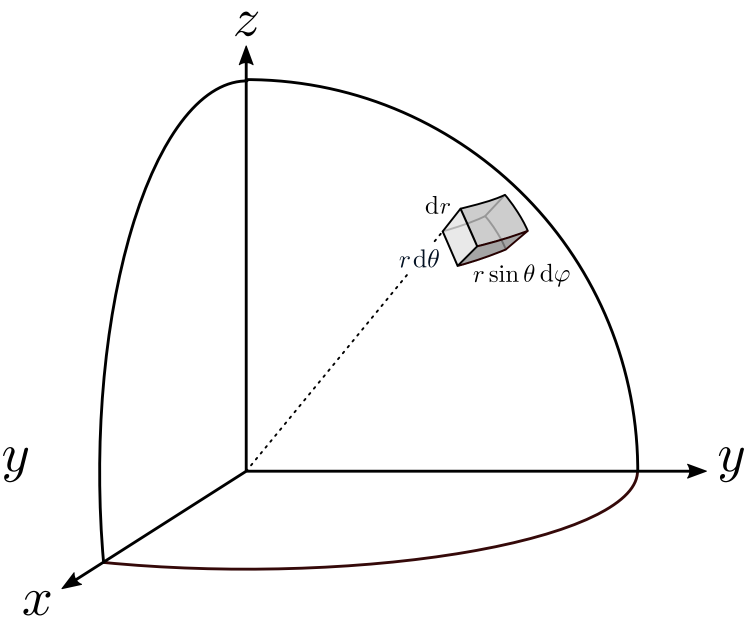
$$\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

Remarque

Dans ces trois derniers calculs, le résultat dépend de la coordonnée r. Cela veut dire que les éléments de surface (et de volume) ne sont pas tous égaux : ils "s'agrandissent" à mesure que r augmente.

III Coordonnées sphériques





A Élément de surface

On se limite à étudier un élément de surface perpendiculaire à la direction radiale (morceau de sphère) car c'est en pratique le seul utilisé.

Prenons le point $\mathrm{M} = (r, \theta, \varphi)$. Avec un peu de trigonométrie basique, on peu exprimer la distance qui le sépare de l'axe z :

$$l = r\sin\theta$$

Ainsi le petit angle $\mathrm{d}\varphi$ va tracer un arc de longueur $r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi$. De façon plus simple l'angle $\mathrm{d}\theta$ trace un arc $r\mathrm{d}\theta$. Ce qui donne une surface

$$\mathrm{d}S = (r\,\mathrm{d}\theta)\,(r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi)$$

Donc finalement

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{d}S} = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\,\overrightarrow{e_r}}$$

B Élément de volume

Ensuite on peut étirer selon la direction $\overrightarrow{e_r}$ d'une quantité infinitésimale $\mathrm{d}r$ d'où un volume élémentaire

$$\boxed{\mathrm{d}V = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}$$

Remarque

Comme pour les coordonnées cylindriques ces éléments varient en taille en fonction de M, en particulier les éléments à l'équateur ($\theta = {}^{\pi}/_{2}$) sont "plus grands" que ceux aux pôles ($\theta \in \{0, \pi\}$).