Relations de passage

Plan

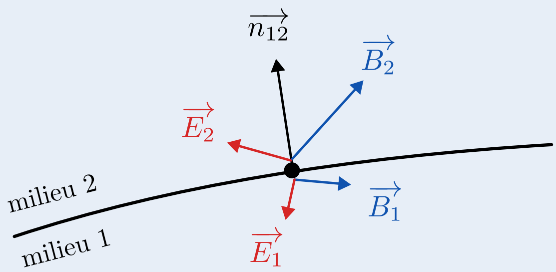
But

On cherche à relier les champs électriques et magnétiques de chaque côtés d'une interface (discontinuité de l'espace).

Notations

On considère une interface entre deux milieux 1 et 2. Dans un cadre général, cette interface peut présenter une charge surfacique σ et un courant surfacique $\overrightarrow{j_s}$.

On note $\overrightarrow{n_{12}}$ le vecteur unitaire perpendiculaire à l'interface, de 1 vers 2.



Alors on peut écrire des relations entres les champs électriques $\overrightarrow{E_1}$, $\overrightarrow{E_2}$ et magnétiques $\overrightarrow{B_1}$, $\overrightarrow{B_2}$ dans chacun des milieux :

Composante	Champ électrique	Champ magnétique
Tangentielle	$\overrightarrow{E_{2T}} - \overrightarrow{E_{1T}} = \overrightarrow{0}$	$\overrightarrow{B_{2T}} - \overrightarrow{B_{1T}} = \mu_0 \overrightarrow{j_s} \wedge \overrightarrow{n_{12}}$
Normale	$\overrightarrow{E_{2N}} - \overrightarrow{E_{1N}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \overrightarrow{n_{12}}$	$\overrightarrow{B_{2N}} - \overrightarrow{B_{1N}} = 0$

Ce que l'on peut regrouper en deux équations vectorielles :

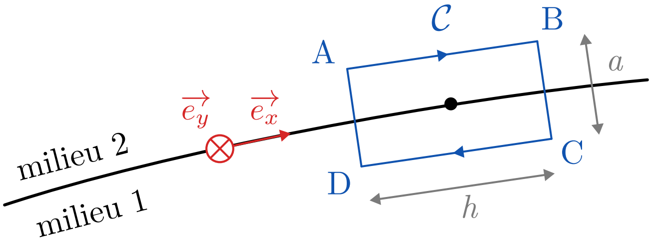
$$\begin{cases} \overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E_1} = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0} \overrightarrow{n_{12}} \\ \overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1} = \mu_0 \overrightarrow{j_s} \wedge \overrightarrow{n_{12}} \end{cases}$$

I Champ électrique

A Composante tangentielle

Maxwell-Faraday

On considère un petit contour orienté $\mathcal{C}$ avec deux côtés tangents à l'interface et deux autres perpendiculaires, tel que représenté ci-contre. On peut alors calculer la circulation du champ électrique sur $\mathcal{C}$:



$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E}\cdot\vec{\mathrm{d}l} = \iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}\,\mathrm{d}S$$

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{E}\cdot\vec{\mathrm{d}l} + \int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} \vec{E}\cdot\vec{\mathrm{d}l} + \int_{\mathrm{C}}^{\mathrm{D}} \vec{E}\cdot\vec{\mathrm{d}l} + \int_{\mathrm{D}}^{\mathrm{A}} \vec{E}\cdot\vec{\mathrm{d}l} = \iint_{\mathcal{S}} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,\mathrm{d}S$$

Avec $\mathcal{S}$ une surface qui s'appuie sur $\mathcal{C}$, par exemple la section dessinée par les rectangle. Alors on fait tendre a vers 0, ainsi trois intégrales s'annulent :

$$\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} \vec{E}\cdot\vec{\mathrm{d}l} \to 0 \qquad \int_{\mathrm{D}}^{\mathrm{A}} \vec{E}\cdot\vec{\mathrm{d}l} \to 0 \qquad \iint_{\mathcal{S}} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,\mathrm{d}S \to 0$$

Et dans les deux autres intégrales, il reste les composantes tangentielles des champs électrique :

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{E}\cdot\vec{\mathrm{d}l} + \int_{\mathrm{C}}^{\mathrm{D}} \vec{E}\cdot\vec{\mathrm{d}l} = 0$$
$$\int_{0}^{h} E_{2x}\,\mathrm{d}l + \int_{0}^{h} -E_{1x}\,\mathrm{d}l = 0$$

Alors on fait également tendre h vers 0 de sorte que les champs puissent être considérés constants.

$$(E_{2x} - E_{1x})\,h = 0$$
$$E_{2x} - E_{1x} = 0$$

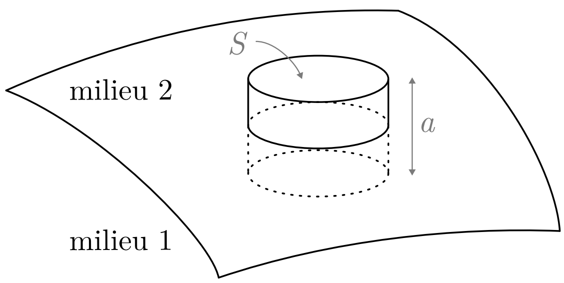
Ensuite on peut refaire ce raisonnement avec l'autre direction tangentielle et obtenir le même genre d'égalité. Ce qui donne finalement

$$\overrightarrow{E_{2T}} - \overrightarrow{E_{1T}} = \vec{0}$$

B Composante normale

Maxwell-Gauss

Pour la composante normale, on va considérer une surface fermée de forme cylindrique $\mathcal{S}$ qui entoure un point de l'interface. Son axe étant perpendiculaire à l'interface.



On peut alors calculer la divergence du champ électrique à travers cette surface :

$$\iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\,\overrightarrow{E}\,\mathrm{d}V$$
$$\iint_{S_1} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S_1} + \iint_{S_2} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S_2} + \iint_{S_{\mathsf{lat}}} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S_{\mathsf{lat}}} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Avec S_1, S_2 les faces inférieure et supérieure de $\mathcal{S}$ et S_{lat} sa face latérale.

De même qu'en partie précédente, on fait tendre a vers 0, ce qui annule l'intégrale latérale. Et transforme le reste en faisant apparaître les composantes normales car

$$\overrightarrow{dS_1} = -\mathrm{d}S\,\overrightarrow{n_{12}} \qquad \overrightarrow{dS_2} = \mathrm{d}S\,\overrightarrow{n_{12}} \qquad \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{n_{12}} = E_N$$

$$\iint_{S_1} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} + \iint_{S_2} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$
$$\iint_{S_1} -E_{1N}\,\mathrm{d}S + \iint_{S_2} E_{2N}\,\mathrm{d}S = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Alors on fait également tendre S vers 0 de sorte que les champs puissent être considérés constants. De plus la charge intérieure sera donc uniquement dû à la charge surfacique :

$$(E_{2N} - E_{1N})\,S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$
$$E_{2N} - E_{1N} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Pour bien faire apparaître le choix de convention, on peut réhabiliter le vecteur unitaire :

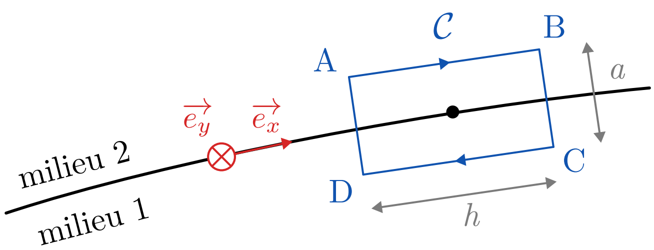
$$\overrightarrow{E_{2N}} - \overrightarrow{E_{1N}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\,\overrightarrow{n_{12}}$$

II Champ magnétique

A Composante tangentielle

Maxwell-Ampère

Le raisonnement est le même que pour la composante tangentielle du champ électrique : on considère le même contour orienté $\mathcal{C}$ et on calcule la circulation de $\overrightarrow{B}$



$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B}\,\mathrm{d}S$$
$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} + \int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} + \int_{\mathrm{C}}^{\mathrm{D}} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} + \int_{\mathrm{D}}^{\mathrm{A}} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mu_0 I_{\mathsf{enlacé}} + \iint_{\mathcal{S}} \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}\,\mathrm{d}S$$

On fait tendre a vers 0, donc :

$$\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} \to 0 \qquad \int_{\mathrm{D}}^{\mathrm{A}} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} \to 0 \qquad \iint_{\mathcal{S}} \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \,\mathrm{d}S \to 0$$

Par conséquent,

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} + \int_{\mathrm{C}}^{\mathrm{D}} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$
$$\int_0^h B_{2x} \,\mathrm{d}l + \int_0^h -B_{1x} \,\mathrm{d}l = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

Alors on fait également tendre h vers 0 de sorte que les champs puissent être considérés constants. De plus le courant enlacé sera alors uniquement dû aux courants surfaciques :

$$(B_{2x} - B_{1x})\, h = \mu_0 j_{sy}\, h$$
$$B_{2x} - B_{1x} = \mu_0 j_{sy}$$

Et dans l'autre direction tangentielle on obtient de même

$$B_{2y} - B_{1y} = -\mu_0 j_{sx}$$

Ce qui peut effectivement s'écrire

$$\overrightarrow{B_{2T}} - \overrightarrow{B_{1T}} = \mu_0 \overrightarrow{j_s} \wedge \overrightarrow{n_{12}}$$

B Composante normale

Maxwell-Thompson

Pour cette partie, on reprend le raisonnement avec la surface fermée. La démonstration est la même que pour le champ électrique sauf que le flux de $\overrightarrow{B}$ à travers $\mathcal{S}$ est nul.

$$\oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = 0$$

Donc on aboutit à la relation

$$\overrightarrow{B_{2N}} - \overrightarrow{B_{1N}} = 0$$