Équation de d'Alembert

Plan

Notations

Dans de nombreux domaine de la physique, on peut obtenir des phénomènes ondulatoires. On considérera un champ scalaire dans un espace en une dimension $s(t,x)$ se propageant comme une onde. La propagation la plus simple possible est décrite par l'équation de D'ALEMBERT :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

But

Résoudre mathématiquement l'équation de D'ALEMBERT puis l'interpréter

I Résolution

On fait le changement de variables

$$\begin{cases} u = x - ct \\ v = x + ct \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{v-u}{2c} \\ x = \dfrac{u+v}{2} \end{cases}$$

Alors la dérivée première de s par rapport à x est :

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial s}{\partial x} = myred$$

Et donc au deuxième ordre on a

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(myred)$$
$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial u}(myred)\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}(myred)\,\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial u}(myred) + \frac{\partial}{\partial v}(myred)$$
$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 s}{\partial u^2} + 2\,\frac{\partial^2 s}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 s}{\partial v^2}$$

En faisant de même avec le temps, on obtient :

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}$$
$$\frac{\partial s}{\partial t} = -c\frac{\partial s}{\partial u} + c\frac{\partial s}{\partial v}$$

Et ainsi

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 s}{\partial u^2} - 2\,\frac{\partial^2 s}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 s}{\partial v^2} \right)$$

On peut enfin réinjecter ces deux expressions dans notre équation :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$
$$myblue + 2\,\frac{\partial^2 s}{\partial u \partial v} + myorange = myblue - 2\,\frac{\partial^2 s}{\partial u \partial v} + myorange$$

Donc notre équation de D'ALEMBERT se résume à

$$\frac{\partial^2 s}{\partial u \partial v} = 0$$

$\downarrow$ intégration par rapport à $umyred$

$$\frac{\partial s}{\partial v} = f(v)$$

On note F une primitive de f, alors en intégrant cette fois-ci par rapport à v, on fait apparaître une constante par rapport à v, c'est-à-dire une fonction $G(u)$:

$$s(u,v) = F(u) + G(v)$$
$$s(t,x) = F(x-ct) + G(x+ct)$$

II Interprétation

- On retrouve la forme d'ondes progressives
  - Croissante : $F(x-ct)$
  - Décroissante : $G(x+ct)$
- La grandeur c apparaît donc comme la vitesse des ondes. On remarque qu'il n'y a qu'une seule vitesse possible, donc il s'agit d'une équation d'onde **non-dispersive**.
- On remarque que les variables x et $y = ct$ jouent le même rôle dans l'équation de départ :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 s}{\partial y^2}$$

Il est donc logique de retrouver cette similitude dans les réponses. Les ondes progressives $F(x-ct)$ et $G(x+ct)$ couplent l'espace et le temps et leur font jouer des rôles similaires :

Attendre revient à translater l'espace