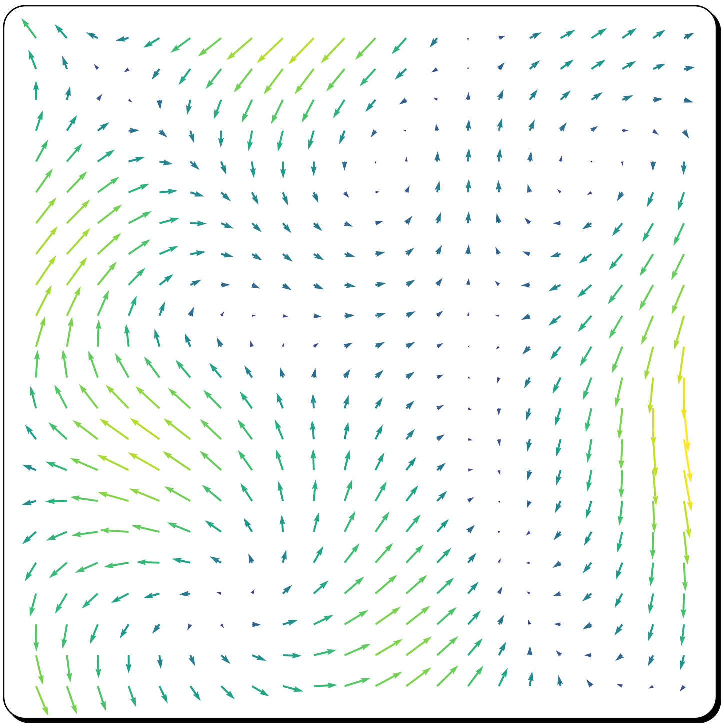
Analyse vectorielle

Plan

Notations

Dans cette fiche méthode, on prendra un champ $\overrightarrow{A}$ dans un espace en trois dimensions

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3\\ \overrightarrow{r} &\longrightarrow \overrightarrow{A}(\overrightarrow{r})\end{aligned}$$



Voici un exemple d'un champ quelconque (dans un espace à deux dimensions !!!)

I Intégrales de champs

A Contour 1D

Définition : Intégrale le long d'un chemin et circulation

L'intégrale de $\overrightarrow{A}$ le long d'un chemin $\mathcal{C}$ est définie ainsi :

$$I = \int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{dl}$$

Lorsque ce chemin est fermé, on parle de **circulation** et on note :

$$C = \oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{dl}$$

Quand un champ $\overrightarrow{A}$ à une circulation nulle, quelque soit le contour fermé choisi, on dit de lui qu'il est **à circulation conservative**.

Remarque

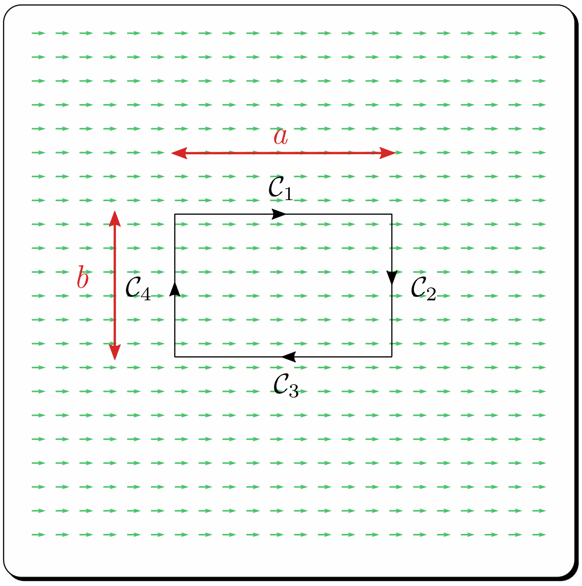
A priori les deux intégrales dépendent du chemin tout entier ! Pas simplement de ses bornes s'il en a (pour un chemin ouvert).

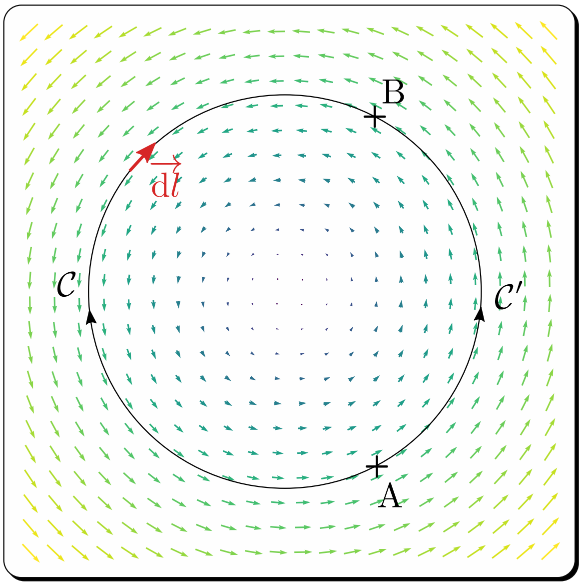
Exemple

On représente ci-dessous deux champ dont on peut donner les expressions :

$$\overrightarrow{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

Le premier champ est uniforme et le second circulaire :





Uniforme On peut calculer l'intégrale de $\overrightarrow{A}$ le long des chemins $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\mathcal{C}_1} \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{dl} \\
I_1 &= \int_{\mathcal{C}_1} \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{e_x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{car } \overrightarrow{dl} = \mathrm{d}x\,\overrightarrow{e_x} \text{ le long de } \mathcal{C}_1 \\
I_1 &= \int_{\mathcal{C}_1} v_0\,\mathrm{d}x \qquad \text{car } \overrightarrow{A} = v_0\,\overrightarrow{e_x} \\
I_1 &= a v_0
\end{aligned}$$

De même, trouve que

$$I_2 = 0 \qquad I_3 = -a v_0 \qquad I_4 = 0$$

Ainsi la circulation sur le contour fermé $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_4$ est

$$C = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$$

Circulaire Sans calculs, on voit que le chemin $\mathcal{C}$ va à rebours du champ, alors que $\mathcal{C}'$ va dans son sens, donc les intégrales correspondantes ne peuvent pas être égales, malgré le fait que les points de départ et d'arrivée soient les mêmes :

$$\int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{dl} < 0 \qquad\qquad \int_{\mathcal{C}'} \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{dl} > 0$$

B Surface 2D

Définition : Flux

Lorsqu'on intègre un champ sur une surface $\mathcal{S}$, un parle de **flux** :

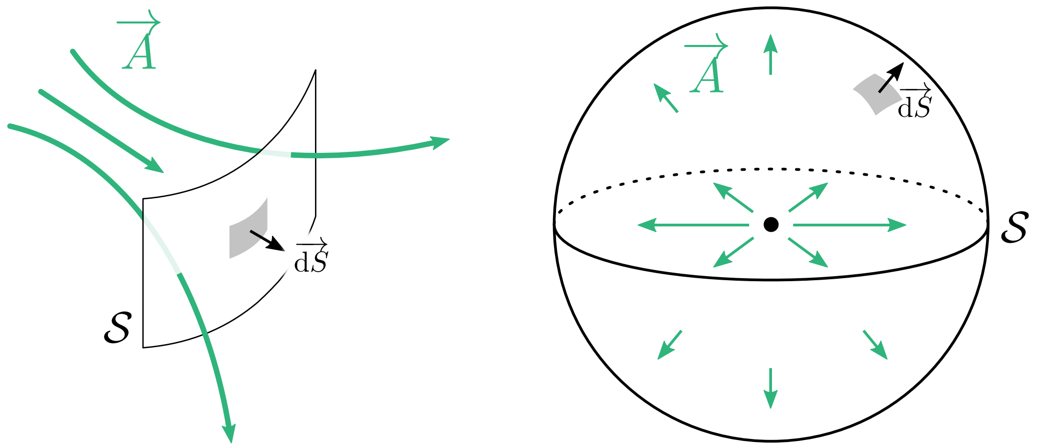
$$\Phi = \iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{dS}$$

De même si $\mathcal{S}$ est fermée, on note

$$\Phi = \oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Avec $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ pris par convention **sortant** du volume entouré.

Exemple



À gauche on présente un exemple quelconque pour comprendre les notations. Intéressons-nous au cas particulier à droite : la surface $\mathcal{S}$ est une sphère de rayon R, à travers laquelle passe un champ

$$\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}) = \frac{\overrightarrow{e_r}}{r^2}$$

Alors on peut calculer le flux de $\overrightarrow{A}$ sortant par cette sphère :

$$\begin{aligned}
\Phi &= \oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{dS} \\
\Phi &= \oiint_{\mathcal{S}} \frac{\overrightarrow{e_r}}{R^2} \cdot \left(R^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \, \overrightarrow{e_r}\right) \\
\Phi &= \oiint_{\mathcal{S}} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi = 4\pi > 0
\end{aligned}$$

Le signe de Φ nous indique que le flux global sort effectivement de la sphère.

II Opérateurs locaux

A Gradient

Définition : Gradient d'un champ scalaire

Pour tout un champ scalaire $s : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, on peut associer un champ vectoriel $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, s : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ appelé **gradient de** s définit ainsi dans le coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, s = \frac{\partial s}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial s}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial s}{\partial z}\overrightarrow{e_z} = \begin{pmatrix} \partial_x s \\ \partial_y s \\ \partial_z s \end{pmatrix}$$

Ce champ s'interprète ainsi en un point M :

Sa direction indique comment suivre l'augmentation de s autour de M

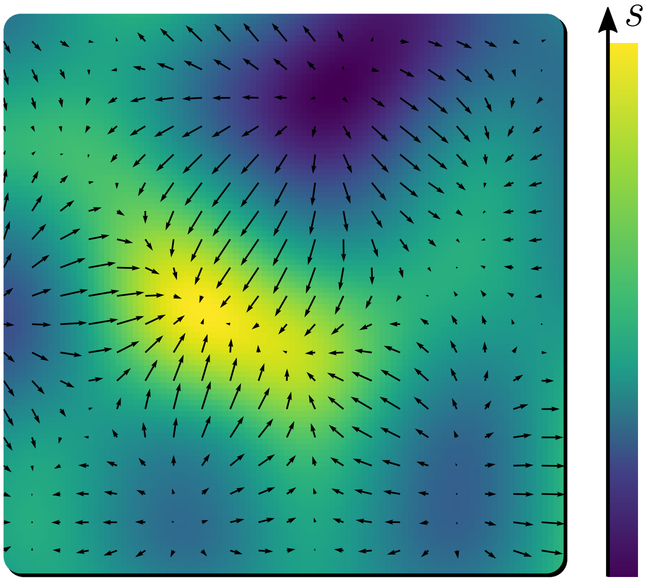
Sa norme indique l'intensité avec laquelle s varie dans cette direction

Remarque

On peut définir également le gradient en 2D :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, s = \frac{\partial s}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial s}{\partial y}\overrightarrow{e_y}$$

Exemple



Dans l'exemple ci-dessus le champ scalaire s est représenté en couleur et le gradient correspond aux flèches noires. Pour rendre cela plus concret, on peut dire qu'il s'agit d'un carte indiquant les reliefs, donc $s(x, y)$ est la hauteur au point (x, y). On voit bien que

- Le gradient pointe toujours vers le sens de la montée
- Plus la montée est raide, plus la norme du gradient est élevée (en haut des collines et en bas des vallées, les vecteurs sont quasi nuls)

Théorème : Champ à circulation conservative

Lorsqu'un champ vectoriel $\vec{A}$ est à circulation conservative, il dérive d'un gradient. La réciproque est vraie :

$$\forall \mathcal{C},\ \oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot \vec{\mathrm{d}l} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists s;\ \vec{A} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, s$$

Remarque

Le choix de s n'est pas unique, on peut le prendre comme on veut à une constante près, puisque $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$ n'est définie qu'avec des dérivées :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(s + \mathrm{cste}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, s$$

Propriété : Gradient et différentiel

On peut se servir du gradient pour définir le différentiel d'un champ scalaire (**Annexe :** *Dérivées partielles*) :

$$\mathrm{d}s = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, s \cdot \vec{\mathrm{d}l}$$

Avec $\vec{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}x\, \vec{e_x} + \mathrm{d}y\, \vec{e_y} + \mathrm{d}z\, \vec{e_z}$

Démo

$$\mathrm{d}s = \partial_x s\, \mathrm{d}x + \partial_y s\, \mathrm{d}y + \partial_z s\, \mathrm{d}z \qquad \text{(Définition d'un différentiel)}$$

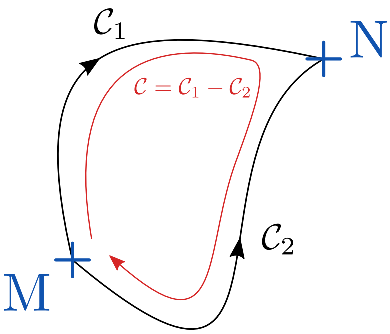
$$\mathrm{d}s = (\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, s) \cdot \vec{\mathrm{d}l} \qquad \text{avec} \quad \vec{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}x\, \vec{e_x} + \mathrm{d}y\, \vec{e_y} + \mathrm{d}z\, \vec{e_z}$$

Remarque

Lorsqu'un champ est à circulation conservative, son intégrale le long d'un chemin quelconque $\mathcal{C}_1$, ne dépend que des bornes M et N de celui-ci :

$$\int_{\mathcal{C}_1} \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \int_{\mathcal{C}_1} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, s \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} \mathrm{d}s = s(\mathrm{N}) - s(\mathrm{M})$$

On peut donner une preuve plus visuelle :



Le contour fermé $\mathcal{C}$ contient une portion suivant $\mathcal{C}_1$ puis $\mathcal{C}_2$ mais dans le sens inverse, donc

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2$$

$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \int_{\mathcal{C}_1} \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} - \int_{\mathcal{C}_2} \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}$$

Or puisque le champ est à circulation conservative, cette circulation doit être nulle

$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = 0 \implies \int_{\mathcal{C}_1} \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \int_{\mathcal{C}_2} \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}$$

B Divergence

Définition : Divergence d'un champ vectoriel

On peut associer à tout champ vectoriel $\overrightarrow{A}$, on champ scalaire qui en découle, appelé **divergence de $\overrightarrow{A}$** et défini ainsi en coordonnées cartésiennes :

$$\mathrm{div}\, \overrightarrow{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

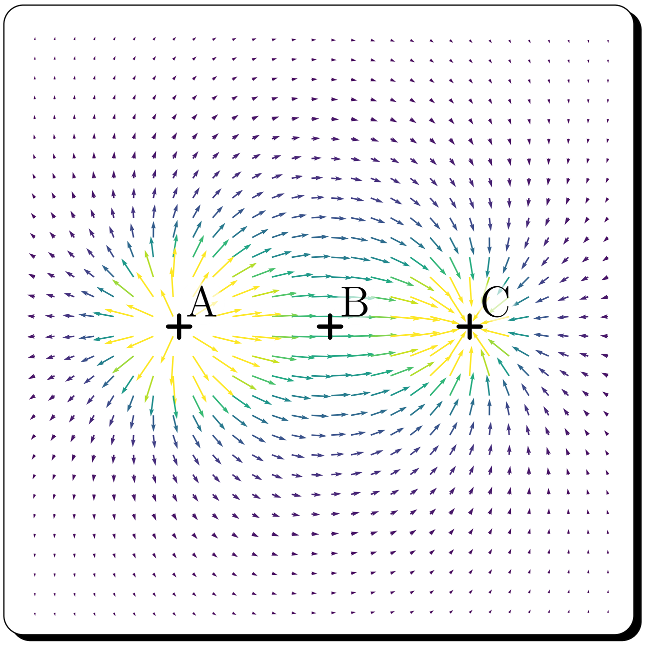
Il quantifie à quel point $\overrightarrow{A}$ diverge en chaque point de l'espace.

Remarque

On peut définir la divergence en 2D :

$$\mathrm{div}\, \overrightarrow{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}$$

Exemple



On peut voir cet exemple comme un flot d'eau, vu du dessus, sortant d'une source A et s'écoulant vers un puits C. On voit clairement que ce flot diverge en A et converge en C. Au niveau du point B, il semblerait qu'autant de fluide arrive de la gauche et parte vers la droite, donc rien se perd ni se créer :

$$\operatorname{div}(\mathrm{A}) > 0 \qquad \operatorname{div}(\mathrm{B}) = 0 \qquad \operatorname{div}(\mathrm{C}) < 0$$

C Rotationnel

Définition : Rotationnel d'un champ vectoriel

On peut associer à tout champ vectoriel $\overrightarrow{A}$, un champ vectoriel qui en découle, appelé **rotationnel de** $\overrightarrow{A}$ et noté $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}$, dont les coordonnées cartésiennes sont :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A} = &\ (\partial_y A_z - \partial_z A_y)\,\overrightarrow{e_x}\\ &+(\partial_z A_x - \partial_x A_z)\,\overrightarrow{e_y}\\ &+(\partial_x A_y - \partial_y A_x)\,\overrightarrow{e_z}\end{aligned}$$

On peut interpréter ce champ de la manière suivante :

Sa direction donne l'axe autour duquel tourne localement A

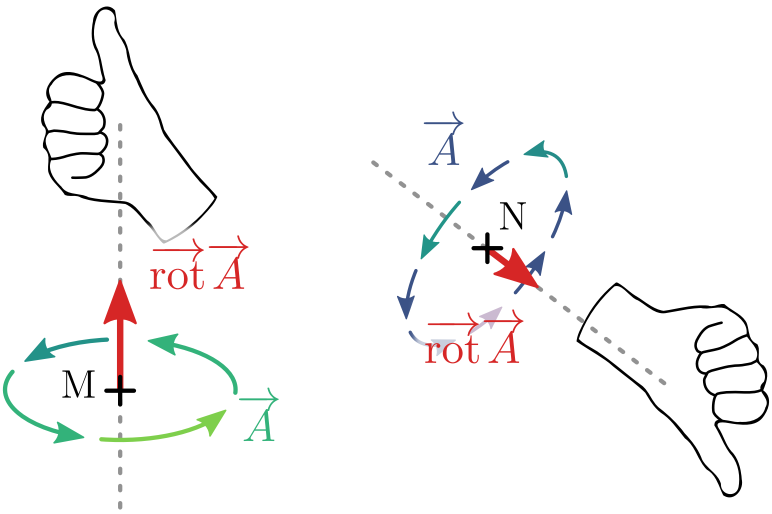
Sa norme quantifie l'intensité de la rotation en ce point

Remarque

En 2D (plan (Oxy)) ce champ est simplement un champ scalaire, car $\overrightarrow{A}$ ne peut tourner qu'autour de la direction z. La seule information donnée est sur l'intensité de la rotation :

$$\mathrm{rot}\,\overrightarrow{A} = \partial_x A_y - \partial_y A_x$$

Exemple



On a représenté le rotationnel d'un champ $\overrightarrow{A}$ en deux point M et N.

- Pour déterminer la direction de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}$, on utilise la règle du tire-bouchon de MAXWELL : avec sa main **droite**, on enroule les doigts dans le sens de la rotation. Le pouce indique alors l'axe et le sens de rotation de $\overrightarrow{A}$ en ce point.
- On remarque que $\overrightarrow{A}$ est d'intensité plus grande autour de M que de N. Donc la norme de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}$ y est plus élevée.

Théorème : Champ à divergence nulle

Lorsqu'un champ vectoriel $\overrightarrow{A}$ est à divergence nulle en tout point de l'espace, il dérive d'un rotationnel. La réciproque est vraie.

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{A} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \overrightarrow{u};\ \overrightarrow{A} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{u}$$

D Laplacien

Définition : Laplacien d'un champ scalaire

On peut associer à tout champ scalaire s, un champ scalaire qui en découle, appelé **laplacien de** s et noté Δs :

$$\Delta s = \mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,s = {\partial_x}^2 s + {\partial_y}^2 s + {\partial_z}^2 s$$

De même que pour la dérivée seconde d'une fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, ce champ représente la courbure de s.

Définition : Laplacien d'un champ vectoriel

On peut associer à tout champ vectoriel $\overrightarrow{A}$, un champ vectoriel qui en découle, appelé **laplacien de** $\overrightarrow{A}$ et noté $\Delta\overrightarrow{A}$:

$$\Delta \overrightarrow{A} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\,\overrightarrow{A} - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}$$

$$\Delta \overrightarrow{A} = \Delta A_x\,\overrightarrow{e_x} + \Delta A_y\,\overrightarrow{e_y} + \Delta A_z\,\overrightarrow{e_z} = \begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix}$$

Il s'agit simplement du laplacien appliqué sur chaque composante de $\overrightarrow{A}$. Son interprétation est semblable : il indique la courbure de A_x, A_y et A_z.

E Nabla

Toutes ces définitions (opérateurs en coordonnées cartésiennes) sont au programme !
Ce qui suit ne l'est pas, mais reste un excellent moyen mnémotechnique pour retrouver ces formules facilement...
Il ne faut pas utiliser cette notation en devoir ou au concours !

Définition : Opérateur nabla

On utilise en physique parfois un abus de notation. On note (**en coordonnées cartésiennes !**)

$$\overrightarrow{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\,\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial}{\partial y}\,\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial}{\partial z}\,\overrightarrow{e_z} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$$

Propriété : Utilisation de nabla

Alors les définitions précédentes se résument ainsi

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,s = \overrightarrow{\nabla} s$$
$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A}$$
$$\Delta s = \overrightarrow{\nabla}^2 s$$
$$\Delta \overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla}^2 \overrightarrow{A}$$

Démo

- Pour le gradient, on retrouve bien la définition à partir de $\overrightarrow{\nabla} s$

$$\overrightarrow{\nabla} s = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} s = \begin{pmatrix} \partial_x s \\ \partial_y s \\ \partial_z s \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,s$$

- Pour la divergence, on retrouve bien la définition à l'aide du produit scalaire $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A}$

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z = \mathrm{div}\,\overrightarrow{A}$$

- Pour le rotationnel, on retrouve bien la définition à l'aide du produit vectoriel $\vec{\nabla} \wedge \vec{A}$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{A}$$

- Pour le laplacien scalaire, on retrouve bien la définition à l'aide du produit scalaire $\vec{\nabla}^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$

$$\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\right) s = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} s = \begin{pmatrix} {\partial_x}^2 \\ {\partial_y}^2 \\ {\partial_z}^2 \end{pmatrix} s = \begin{pmatrix} {\partial_x}^2 s \\ {\partial_y}^2 s \\ {\partial_z}^2 s \end{pmatrix} = \Delta s$$

III Théorèmes d'intégration

A Théorème de Green-Ostrogradski

Théorème : Théorème de Green-Ostrogradski

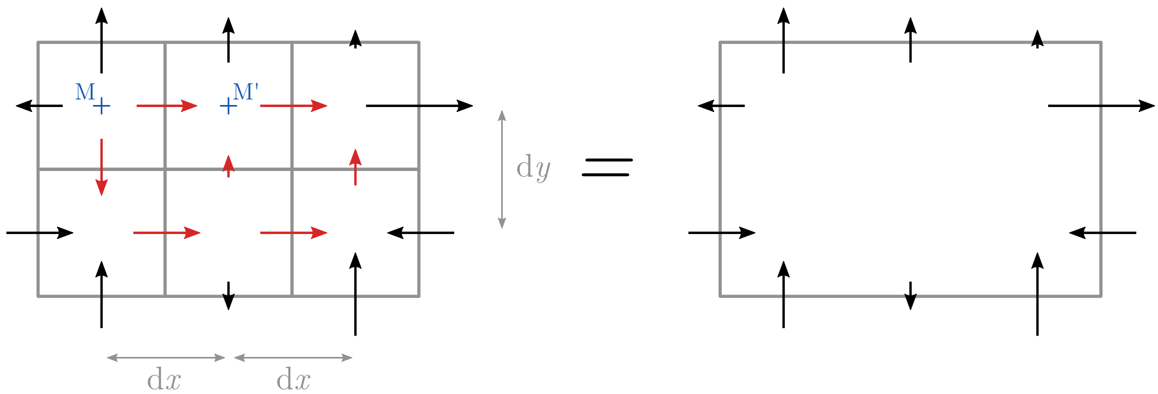
On peut relier le flux de $\vec{A}$ à travers un surface fermée $\mathcal{S}$ à sa divergence :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\, \vec{A}\, \mathrm{d}V = \oint\!\!\!\oint_{\mathcal{S}} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

où $\mathcal{V}$ est le volume entouré par $\mathcal{S}$.

Démo

On peut donner une idée visuelle pour comprendre le sens de cette relation (⚠ c'est en 2D, mais le raisonnement est extrapolable) :



À gauche on représente $\vec{A}$ autour de six points infiniment proches, le voisinage de chacun étant donné par un petit carré. Ceci nous donne accès à la divergence de $\vec{A}$ en chaque point : plus les flèches sortent d'un carré, plus celle-ci est élevée en ce point.

Lorsqu'on ajoute la divergence en un point M à celle du point juste à côté M', la composante à l'interface ne contribue plus : si $\vec{A}$ s'éloigne de M, il se rapproche de M' avec exactement la même norme !

Ainsi en ajoutant les divergences de tous les points côtes à côtes (intégrale sur le volume), tout ce qui est à l'intérieur ne contribue plus. Seul compte le champ $\vec{A}$ aux limites (intégrale sur la surface).

B Théorème de Stockes

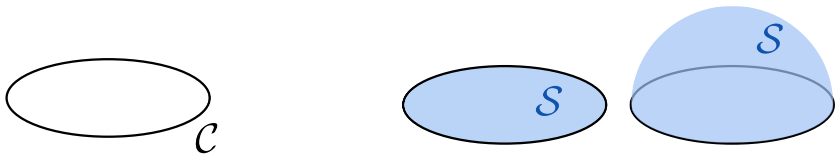
Théorème : Théorème de Stockes

On peut relier la circulation de $\overrightarrow{A}$ le long d'un contour fermé $\mathcal{C}$ à son rotationnel :

$$\iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\mathcal{S}} = \oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l}$$

où $\mathcal{S}$ peut être **n'importe quelle** surface s'appuyant sur le contour $\mathcal{C}$.

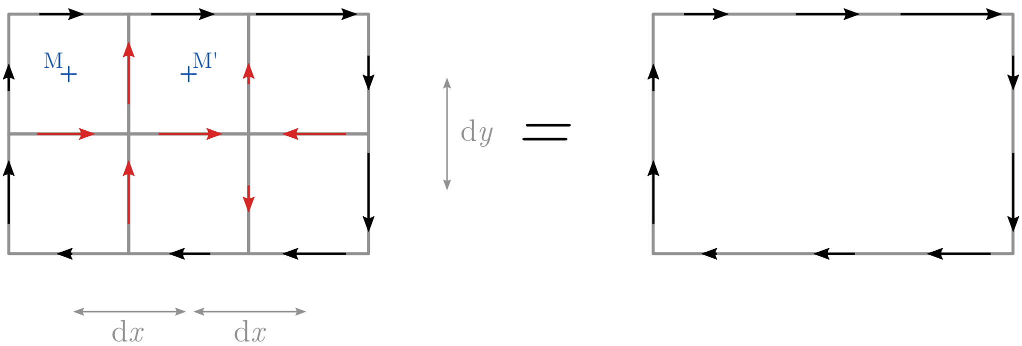
Exemple



Dans l'exemple ci-dessus, $\mathcal{C}$ est un cercle. On peut donc choisir comme surface $\mathcal{S}$ le disque ou la cloche représentés à droite. Peu importe tant que $\mathcal{S}$ s'appuie sur $\mathcal{C}$, c-à-d que leur limite dessine ce contour.

Démo

De même que précédemment, on donne une idée visuelle de ce que cela signifie :



Le rotationnel autour de M indique à quel point $\overrightarrow{A}$ tourne autour de ce point et dans quelle direction.

Le champ à l'interface des voisinages M et M' tourne dans le sens trigonométrique autour de M mais dans le sens opposé autour de M' donc les deux se compensent lorsqu'on additionne les rotationnels.

Ainsi en ajoutant les rotationnels de tous les points côtes à côtes (intégrale sur la surface), tout ce qui est à l'intérieur ne contribue plus. Seul compte le champ $\overrightarrow{A}$ aux limites (intégrale sur le contour).

Propriété : Circulation conservative

Il en découle directement qu'un champ dont le rotationnel est nul en tout point de l'espace est à circulation conservative

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A} = \overrightarrow{0} \quad \Longrightarrow \quad \forall\mathcal{C},\ \oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = 0$$

Et donc selon le théorème (p.5)

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A} = \overrightarrow{0} \quad \Longrightarrow \quad \exists s;\ \overrightarrow{A} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,s$$