Analyse spectrale

I Signal périodique

Théorème : Développement en série de Fourier

Soit un signal $s(t)$ périodique de période T (et de fréquence f). Il peut se décomposer comme une somme de signaux de fréquences multiples de f. On parle de **développement en série de Fourier** :

$$s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(2\pi f_n t + \varphi_n) \qquad \text{avec } f_n = nf$$

Remarque

- $s_n(t)$ est le mode n.
  - Le mode $n = 0$ donne une composante continue qui correspond à la valeur moyenne du signal.
  - Le mode $n = 1$ quant à lui est appelé **mode fondamental** de $s(t)$.
- Les fréquences nf sont appelées **harmonies d'ordre** n.
- Les coefficients A_n sont les **amplitudes**, elles représentent les poids relatifs de chaque mode. Par convention on les prend positives $A_n > 0$ quitte à ajouter π à la phase φ_n.

Définition : Spectre

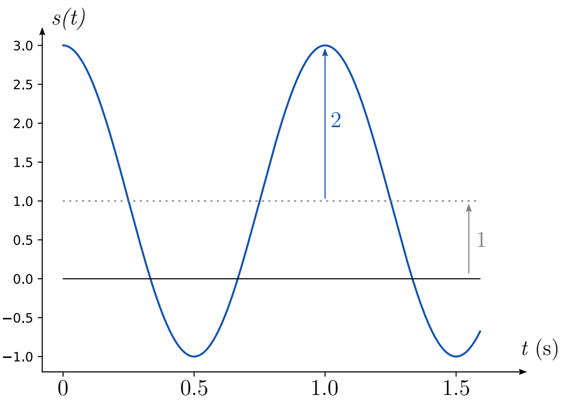
On peut alors associer au signal périodique $s(t)$ son **spectre**, c-à-d la représentation graphique de ses modes : amplitude en fonction de la fréquence.

Exemple

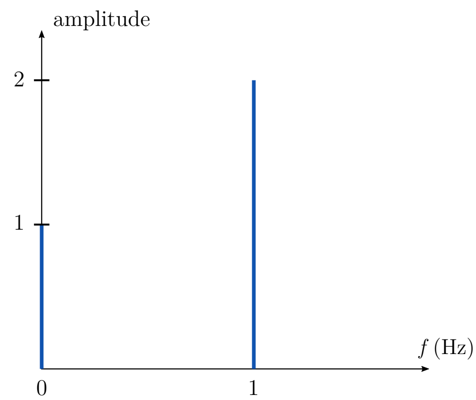
- Dans un premier cas, considérons le signal suivant :

$$s(t) = 1 + 2\cos(2\pi f t) \qquad \text{avec } f = 1\,\mathrm{Hz}$$

Signal



Spectre



L'équation de $s(t)$ nous donne directement son spectre : on voit que le signal est centré sur une valeur moyenne égale à 1 (composante continue de fréquence nulle), et qu'il oscille à une seule fréquence de 1 Hz avec une amplitude de 2.

- Dans un second cas, on étudie un phénomène de battements :

$$s(t) = \cos(2\pi \times 0.1\,t)\cos(2\pi \times 5\,t)$$

Ce signal est bien périodique de période $T = 10\,\mathrm{s}$ donc $f = 0.1\,\mathrm{Hz}$. On peut développer cette expression avec le formulaire

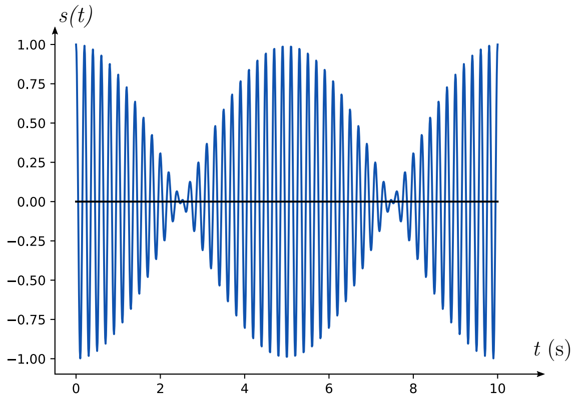
$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$$

Donc ici

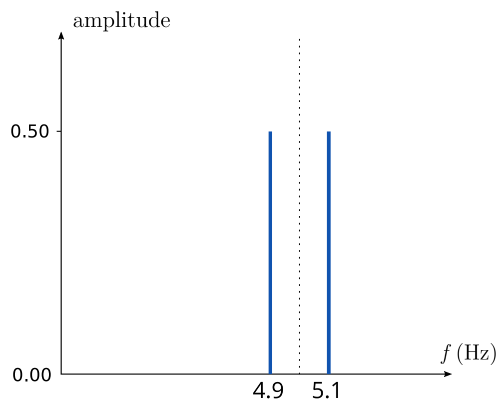
$$s(t) = \frac{1}{2}\cos(2\pi \times 4.9\,t) + \frac{1}{2}\cos(2\pi \times 5.1\,t)$$

Ce qui donne le spectre ci-dessous

Signal



Spectre



Les harmonies $4.9\,\mathrm{Hz}$ et $5.1\,\mathrm{Hz}$ sont bien des multiples de la fréquence du signal $f = 0.1\,\mathrm{Hz}$.

II Signal quelconque

Théorème : Intégrale de Fourier

Un signal non-périodique $s(t)$ peut lui aussi être décomposé, mais au lieu d'avoir une somme discrète sur uniquement certaines fréquences, ici **toutes** les fréquences sont contenues dans le signal :

$$s(t) = \int_0^{+\infty} A(f)\cos(2\pi f t + \varphi(f))\,\mathrm{d}f$$

Remarque

- Le spectre de $s(t)$ est alors donné par la fonction $A(f)$. C'est donc un spectre continu, et non plus discret comme précédemment.
- On peut voir cette généralisation comme une limite du cas périodique : un signal non-périodique, peut-être vu comme un signal périodique avec $T \to +\infty$, donc $f \to 0$. Or les harmonies sont des multiples de f, donc elles sont de plus en plus resserrées, de sorte que le spectre devient petit à petit de plus en plus continu.