Analyse différentielle

I Paramètres thermodynamiques

Lorsque qu'on étudie une transformation continue en physique, on peut la décomposer en une succession de **transformations infinitésimales**. Prenons l'exemple d'un système thermodynamique caractérisé par des **paramètres thermodynamiques** :

- Sa pression P
- Son volume V
- Sa température T

Une transformation infinitésimale revient à faire varier chacun de ces paramètres de façon infiniment faible :

$$(P, V, T) \to (P + \mathrm{d}P, V + \mathrm{d}V, T + \mathrm{d}T)$$

> **Rappel**
>
> Un **fonction d'état** est une grandeur qui est déterminée entièrement par l'état du système (ses paramètres thermodynamiques). Par exemple pour (P, V, T) donnés, on peut définir l'énergie interne $U(P, V, T)$ du système. En revanche le travail lui, n'est pas une fonction d'état : on peut définir le travail subit **pendant une transformation**, mais la données de (P, V, T) ne permet pas de calculer un travail.

Le monde des grandeurs thermodynamiques se divise donc en deux catégories :

Fonctions d'état

$\{\text{états}\} \longrightarrow \mathbb{R}$

Fonctionnelles de transformation

$\{\text{transformations}\} \longrightarrow \mathbb{R}$

II Deux formalisme de transformations infinitésimales

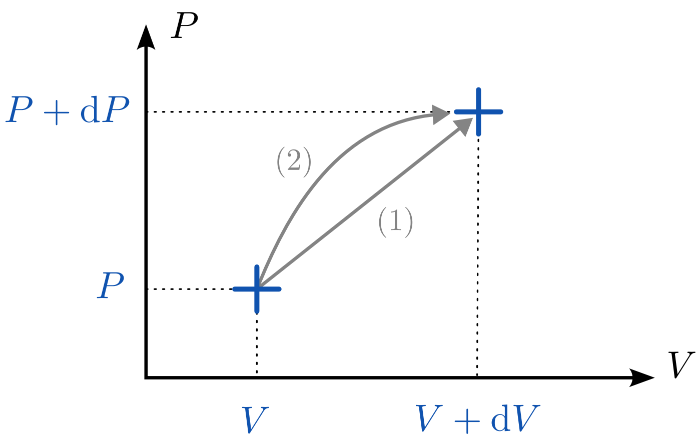
A Fonctions d'état

Prenons une fonction d'état par exemple $U(P, V, T)$. Sa variation lors d'une transformation ne dépend pas du chemin suivit puisque c'est une fonction d'état. On note donc sa variation infinitésimale avec le signe d

$$\mathrm{d}U = \underbrace{U(P + \mathrm{d}P, V + \mathrm{d}V, T + \mathrm{d}T)}_{\text{état final}} - \underbrace{U(P, V, T)}_{\text{état initial}}$$

Ce d indique que les seules données pertinentes sont l'état initial (P, V, T) et l'état final $(P + \mathrm{d}P, V + \mathrm{d}V, T + \mathrm{d}T)$, peu importe le trajet suivit entre les deux.

Dans le schéma ci-contre, la transformation (1) et la transformation (2) donnent la même variation $\mathrm{d}U$ (et de même pour toutes les fonctions d'état).



Ainsi on peut ajouter toutes ces variations infinitésimales les unes aux autres afin d'obtenir la variation globale entre un état A et un état B :

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{d}U = U_{\mathrm{B}} - U_{\mathrm{A}}$$

Remarque

Faire une intégrale c'est simplement additionner toutes les petites variations élémentaires. L'état final de l'une d'elle est l'état initial de la précédente, c'est pourquoi tous les termes s'annulent deux à deux, excepté les termes aux bornes U_{A} et U_{B}

B Fonctionnelles de transformation (nom pas à connaître)

Prenons l'exemple du travail... On ne pourrait pas procéder à ce genre d'intégrale car W_{A} et W_{B} n'ont pas de sens. Pour indiquer que cet objet est de nature mathématique différente, on utilise une autre notation pour les transformations infinitésimales :

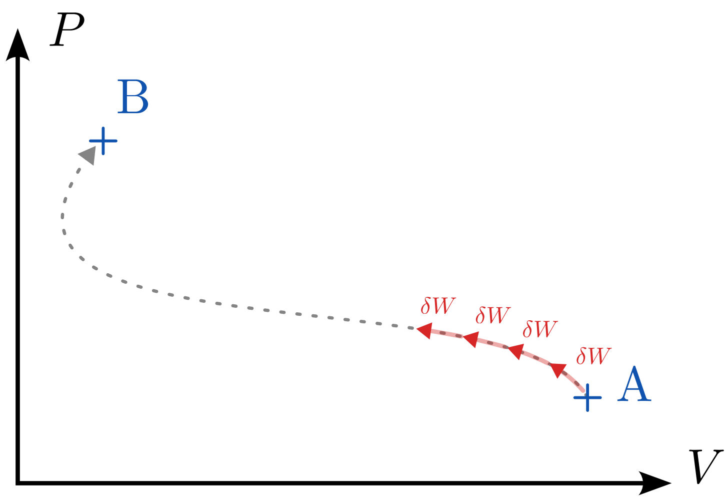
δW est définit comme le **travail élémentaire** reçu par le système pendant la transformation infinitésimale.

Remarque

On ne peut plus parler de variation infinitésimale ici, puisque le travail ne varie pas.

Et cette fois-ci, ce travail élémentaire dépend du chemin suivi. Donc en les mettant bout à bout, on tombe sur le travail total qui dépend lui-même du chemin suivi.

$$W = \int \delta W$$



Remarque

L'intégrale n'est plus composée d'une succession de petites variations, mais d'une succession de petits travaux. La somme du travail reçu à chaque étape donne le travail reçu au total.