

# MP31 - Résonance

Cléments (COLLÉAUX et DE LA SALLE)

7 avril 2020

## Niveau : L3

## Bibliographie

- ↗ *La mécanique*, **Quaranta I** → Expériences oscillateur paramétrique
- ↗ *Mécanique*, **Landau-Lifshitz**, la grosse théorie des oscillateurs paramétriques →
- ↗ *Mécanique : fondements et applications*, **Pérez** → Quelques éléments en plus pour les oscillateurs paramétriques
- ↗ CAP Prépa PCSI → résonance en intensité du RLC p.271
- ↗ **Duffait** →

## Prérequis

➤

## Expériences

👉

## Table des matières

Table des matières	1
1 RLC des familles	2
2 Jean-Pierre le LASER	3
3 Oscillateur paramétrique du love	5
3.1 Oscillateur mécanique . . . . .	6
3.2 Oscillateur électrique . . . . .	7

## Introduction

L'encensoir de Saint-Jacques de Compostelle (Butafumerio) il est balaize (et BIM on se met le jury dans la poche avec leur sujet d'épreuve A 2019!). Vous apprécierez le magnifique petit trucs du type à 4 :20...

<https://youtu.be/WX5fKSw8ok8>

Il s'agit d'un oscillateur paramétrique, on en étudiera un... À moindre échelle :'(

## 1 RLC des familles

### But

Caractériser le facteur de qualité de deux manières (temporelle et spectrale) et voir l'influence des différents composants sur  $Q$ .

↪ Duffait p.145

↪ LP48 - Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique

↪ N'importe quel bouquin de supp

↪ CAP Prépa PCSI, p.271

On s'intéresse uniquement à la résonance en intensité, on prend donc la tension aux bornes de la résistance (parce que la fréquence de résonance est la fréquence propre donc c'est mieux).

$$U_R = \frac{E}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Q = \omega_0 \tau = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

### Manip' : Influence de $R$ et $C$

S'amuser à faire varier les paramètres et montrer en mode normal à l'oscillo les différents régimes, montrer qualitativement l'influence de  $R$  et  $C$  (boîtes à décades?). Commencer à vérifier le lien qui existe entre  $\tau$  et  $Q$  et surtout.

### Expérience : Décrément logarithmique

↪ Krob p.50

⊖ 5 min

Pour vraiment quantifier cette relation entre  $Q$  et  $\tau$ , on utilise la méthode du décrément logarithmique :

$$\delta = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}}$$

Où  $A_n$  et  $A_{n+1}$  sont deux maxima consécutifs dans le signal temporel (en régime pseudo-périodique  $Q > 1/2$ ). Ce décrément est lié à  $\tau$  par la relation

$$T = \delta \tau$$

Avec  $T$  la pseudo-période. On en déduit  $\tau$  à partir d'une série de mesure de  $\delta$  et en prenant la moyenne. On peut alors voir  $Q$  comme le nombre d'oscillations avant que le signal ne s'éteigne. Pour avoir un bon oscillateur, on donc chercher à avoir un grand facteur de qualité...

On peut même faire plusieurs mesures à des  $R$  différents et vérifier une loi linéaire, genre  $\tau \propto 1/R$ .

Mais on peut aussi voir le facteur de qualité  $Q$  comme la finesse de la résonance :

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f}$$

Où  $\Delta f$  est la largeur du pic de résonance à 3 dB.

### Manip' : Influence de $Q$ sur la largeur du pic

Je sais pas si ça se verra bien, à la limite faire la TF à l'oscillo, mais on peut montrer que lorsque  $Q$  augmente, le pic diminue. Donc ça va dans le même sens qu'avant : un grand facteur de qualité ça donnera un bon oscillateur bien monochromatique (et pas trop amorti) !

### Expérience : Caractérisation du RLC

➤ Duffait p.145

⊖ 5 min

- Déterminer la fréquence de résonance avec la méthode de LISSAJOUS, que l'on expliquera à l'aide de la phase de la fonction de transfert. Mesurer la fréquence eu fréquencemètre, on bien avec les curseurs temporels.
- Tracer le diagramme de BODE par réponse indicielle sur LatisPro  $G_{dB}(\omega)$ .
- Extraire les valeurs des fréquences à  $G_{dB}^{max} - 3$  dB et en déduire la largeur du pic  $\Delta f$  puis calculer  $Q = \frac{f_0}{\Delta f}$

## 2 Jean-Pierre le LASER

➤ Jolidon, p.206

➤ Duffait, p.97

➤ LC37

Le LASER est un système résonant : les modes émis par le LASER sont les fréquences qui sont à la fois amplifiées par le milieu amplificateur et sélectionnées par la cavité Fabry-Pérot qui est résonante.

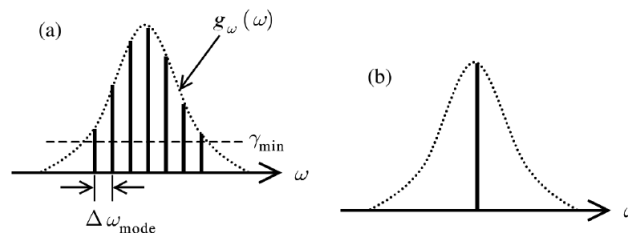


FIGURE 2.1 – **Fonctionnement du LASER** - Les fréquences émis sont amplifiées par le milieu amplificateur et sélectionnées par le FP

Le nombre de fréquences de résonance, ie celles vraiment émises par le LASER, peut être très grand. Ce nombre pourrait être infini si le milieu les amplifiait toutes.

Nous allons maintenant mesurer, pour un LASER donné, l'écart de fréquence  $\Delta f_{mode}$  et l'élargissement spectral d'un pic d'émission ce qui nous permettra de remonter au facteur de qualité du LASER  $Q$  que l'on attend très grand vu la finesse des pics.

## But

Déterminer le facteur de qualité du LASER

Pour ce faire, on se sert d'une autre cavité FP qui nous permettra d'analyser le rayonnement émis par le LASER. Cette cavité FP est un peu particulière, elle est à miroirs sphériques séparés d'une distance  $d$ . Cette distance est réglable car un des miroirs est porté sur un cristal piézo-électrique, ce lorsqu'on applique une rampe de tension sur ce piézo  $d$  varie linéairement. On branche en sortie de ce FP un photodiode qui capte le rayonnement résultant de la résonance du FP et renvoie une tension en dB réponse, tension que l'on observe en mode temporel sur un oscillo.

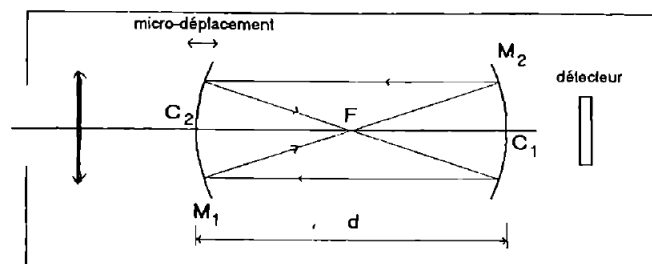


FIGURE 2.2 – Caption

Pour cette cavité FP, la condition de résonance est  $4d = k\lambda$  avec  $k$  entier.

### Principe de fonctionnement

Partons d'une distance  $d_0$  et changeons  $d$  en appliquant une tension au piézo. Dans le cas d'une lumière parfaitement monochromatique et si le déplacement du miroir est suffisant, on observera une succession de pics réguliers correspondant aux ordres d'interférences  $k$  successifs.

En effet si cette lumière est à  $\lambda_0$ , au cours du temps, ie quand la distance  $d$  augmente, il y a des instants  $t_k$  auxquels la distance  $d(t)$  vérifie la condition d'interférence d'ordre  $k$  en  $\lambda_0$ . L'écart temporel entre ces pics est constant et correspond à un décalage  $\Delta d = \lambda_0/4$ , ainsi, si le mouvement du miroir est constant, cela correspond à un intervalle de temps régulier entre ces pics. Cet intervalle est la signature de la cavité FP d'analyse et le FSR **ne doit pas être pris** comme signature du LASER étudié.

En exprimant la condition d'interférences constructives ([Duffait, p.98](#)), on trouve l'écart fréquentiel entre ces pics. Cet écart est nommé **intervalle spectral libre**, FSR pour les anglois, et noté  $f_{\text{FSR}}$  : il s'agit d'une grandeur intrinsèque à la cavité d'analyse tabulée par le constructeur et qui vaut ici 2 GHz.

Un LASER n'émet pas une lumière *parfaitement* monochromatique (plusieurs modes) donc en envoyant son rayonnement dans la cavité d'analyse on va voir plus d'un pic. Comme il y a plusieurs modes on s'attend à plusieurs pics dans un même motif, qui vont correspondre aux interférences constructives associées à une longueur d'onde émise par le LASER. Si on résume, quand  $d$  augmente, à un moment il va y avoir interférences constructives pour une longueur d'onde émise  $\lambda_0$ , à un autre moment c'est une autre longueur d'onde  $\lambda_1$  pour laquelle ça sera le cas... Et ceci se répète de manière périodique (on change juste d'ordre d'interférence), de période le FSR. Dans un motif on a donc autant de pics que de modes émis par le LASER.

Pour mesurer un écart fréquentiel, on se sert du FSR comme étalon et on fait des bêtes produits en croix (fun fact le produit en croix n'est plus au programme de 5e..). Ceci marche aussi pour déterminer la largeur à mi-hauteur d'un pic et donc le facteur de qualité du LASER.

### Expérience : Mesure du facteur de qualité du LASER

🔗 Jolidon p.206, Duffait p.97, notice du FP analyse

☹ ?

- On effectue les branchements à l'aide de la notice, puis on aligne du mieux possible la cavité et le laser
- On observe alors un motif périodique formé de deux pics, les deux modes du LASER HE-Ne.
- Au début on observe un glissement continues des raies à l'intérieur d'un même groupe. l'intensité de chaque raie évoluant à l'intérieur d'une même enveloppe. Ce glissement provient d'une modification de la longueur de la cavité par dilatation thermique (avoir fait chauffer le LASER avant pour éviter ça)
- Mesurer le temps entre deux pics principaux  $\Delta t_{\text{FSR}}$ , le temps entre deux pics  $\Delta t_{\text{pics}}$  et le temps correspondant à la mi-hauteur  $\Delta t_{mh}$
- On utilise la technique secrète *Katon! Le produit en croix!* pour déterminer  $\Delta f_{\text{modes}}$  l'intervalle fréquentiel réel entre les deux modes (à comparer à  $\Delta f_{\text{modes}}^{\text{ref}} = 687$  MHz pour le He-Ne) et  $\Delta f_{mh}$  la largeur à mi-hauteur d'un pic à la fréquence  $f_p$ .
- On calcule alors  $Q = f_p / \Delta f_{mh}$

## 3 Oscillateur paramétrique du love

Mais la résonance ne vient pas forcément du terme de droite... Elle peut provenir du terme de gauche lorsque les paramètres de l'équation différentielle varient dans le temps!

### Exemples

Un gamin sur une balançoire change périodiquement son moment d'inertie et accorde la fréquence de ses jambes à celle de la balançoire. Sinon le Butafumerio c'est toujours stylé :

<https://youtu.be/WX5fKS8ok8>

D'après 🔗 *Landau p.80* , lorsque l'on a une équation dite de MATHIEU

$$x + \omega(t)^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \omega(t)^2 = \omega_0^2 (1 + h \cos(\underbrace{(\omega_0 + \epsilon)t}_{\gamma})) \\ h \ll 1 \\ \epsilon \ll 1 \end{cases}$$

Alors les oscillations sont amplifiées lorsque

$$-\frac{1}{2}h\omega_0 < \epsilon < \frac{1}{2}h\omega_0$$

Il y a donc un compromis à trouver :  $h$  doit être faible pour que le calcul précédent soit correct, mais pas trop sinon évidemment on ne voit pas la plage de résonance... De plus, si on prend en compte les frottements en notant  $\lambda$  l'inverse du temps de relaxation, on a

$$x + \lambda \dot{x} + \omega(t)^2 x = 0$$

Et alors la plage devient

$$-\sqrt{\left(\frac{1}{2}h\omega_0\right)^2 - 4\lambda^2} < \epsilon < \sqrt{\left(\frac{1}{2}h\omega_0\right)^2 - 4\lambda^2}$$

### D'autres résonances

Il existe d'autres résonances lorsque  $\gamma$  est proche de n'importe quelle valeur de la forme  $2\omega_0/n$  avec  $n \in \mathbb{N}$ . Dans notre cas, on étudie  $n = 2$ . Par contre, la plage des résonance diminue en  $h^n$  !

Pour reprendre l'exemple de la balançoire : au lieu de tendre les pieds et plier les pieds à chaque maximum, on peut laisser 2 maxima entre chaque changement de position des jambes. Cela correspond bien à une fréquence 3 fois plus faible :  $n = 6$  !

Concrètement, il y a deux manières de faire un oscillateur paramétrique. Choisir l'une des deux !

## 3.1 Oscillateur mécanique

On utilise un pendule dont on fait varier périodiquement la longueur à l'aide d'un moteur. Ce montage a l'avantage d'être particulièrement clair, on voit directement la résonance sur un pendule donc c'est cool.

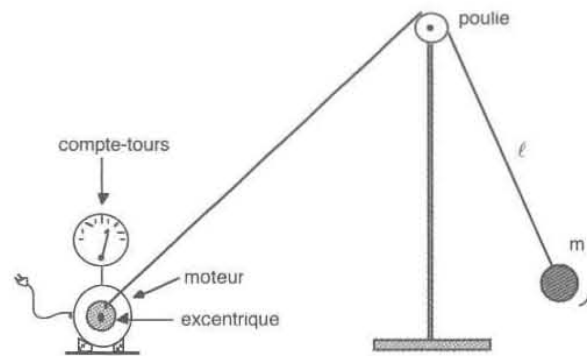


FIGURE 3.1 – Schéma de l'expérience

Ces calculs je les ai trouvé nul part donc pas trop sur... Le [Pérez p.167](#) fait le cas d'un pendule dont le point d'attache oscille verticalement, ce qui n'est pas tout-à-fait notre cas :/

En gros ce que je me dis, c'est qu'on fait varier sinusoidalement la taille du pendule :

$$l(t) = l_0(1 - h \cos \gamma t)$$

Donc la pulsation évolue bien selon l'équation de MATHIEU lorsque  $h \ll 1$  :

$$\omega(t)^2 = \frac{g}{l(t)} \sim \omega_0^2(1 + h \cos \gamma t) \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l_0}}$$

### Expérience : Oscillateur paramétrique mécanique

☞ Quaranta p.284

⊖ 10 min

Matos Moteur P95.28 + Un pendule (ficelle + masse + poulie) + un GBF

Protocole

- Mesurer les longueurs maximale et minimale du pendule et en déduire les paramètres :

$$l_0 = \frac{l_{max} + l_{min}}{2} \quad h = \frac{l_{max} - l_{min}}{l_{max} + l_{min}}$$

Et vérifier que  $h \ll 1$ .

- Estimer  $\lambda$ , par exemple en lançant une fois le pendule sans moteur et en observant la décroissance  $e^{-\lambda t}$ ... Au pire oser, ce sera dans l'ordonnée à l'origine !
- Lancer le GBF à basse fréquence et augmenter petit à petit. Se donner un critère de résonance genre "au bout de 2,3 périodes ça résonne vèner". Repérer avec ce critère la fréquence de début de résonance  $f^-$  et de même lorsqu'elle s'arrête en  $f^+$ .
- Faire de même en changeant de roue sur le moteur pour changer  $h$ .

**Résultats** Vérifier que pour chaque roue, la fréquence moyenne de résonance  $1/2(f^+ + f^-)$  est la même et proche de  $1/2\pi\sqrt{g/l_0}$ . Vérifier également que  $f^{\pm 2}$  sont linéaires (affines) en  $h^2$ .

**En plus** On peut aussi décider de faire varier  $\omega_0$  (en augmentant localement le champ de gravité par exemple) afin de vérifier la linéarité en  $\omega_0^2$ .

### Facteur de qualité

On peut calculer ensuite le facteur de qualité

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f}$$

Bon l'un des plus gros problème, c'est qu'on n'a pas un contrôle incroyable sur  $h$  et  $\omega_0$ ... Du coup on peut préférer la version électrique.

## 3.2 Oscillateur électrique

➤ Pérez p.167

L'idée est de reprendre le circuit RLC mais de faire varier la capacité  $C$  sinusoïdalement... À l'époque moi j'utilisais des condensateurs d'épaisseur variable (sans dec', c'est comme ça qu'on faisait). Mais maintenant, on préfère monter le circuit suivant :

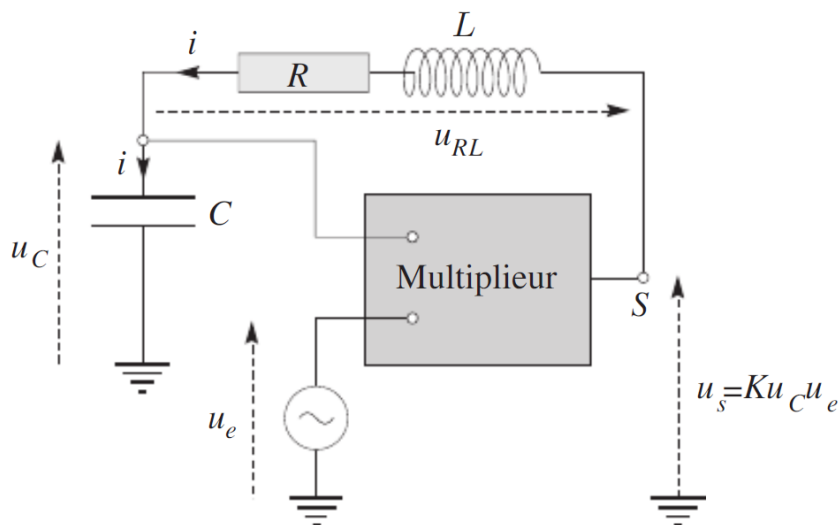


FIGURE 3.2 – Montage de l'oscillateur paramétrique électrique

L'équation correspondante à ce montage est la suivante :

$$\ddot{q} + \lambda \dot{q} + \omega_0^2(1 - ku_e)q = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \lambda = \frac{R}{L} \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{cases}$$

On reconnaît alors une équation de MATHIEU avec un paramètre  $h = ku_e$  !

### Prendre la tension $u_C$

Il faut prendre la tension  $u_C$  aux bornes du condensateur, puisque l'équation est une équation de  $q = Cu_C$

### Expérience : Oscillateur paramétrique électrique

➤ Pérez p.167 (que la théorie)

⊖ 10 min

Commencer par mesurer  $k$  avec les tensions connues et un Fluxmètre. On s'attend à avoir  $k = 1.001 \pm 0.001 \text{ V}^{-1}$ .

Ensuite faire comme pour l'oscillateur mécanique, faire varier l'amplitude de  $u_e$  (donc  $h$ ) et vérifier que les fréquences d'apparition et de disparition de la résonance  $f^\pm$  sont telles que  $f^{\pm 2}$  sont affines de  $h^2$ . S'intéresser aux fréquences autour de  $2f_0$  ( $n = 1$ ) pour lesquelles la bande est la plus large.

On pourra aussi utiliser une boîte de capacité afin de faire varier  $\omega_0$  et vérifier que  $f^{\pm 2}$  sont affines de  $\omega_0^2$ .

De même on pourra remonter au facteur de qualité  $Q = \frac{f_0}{\Delta f}$ . On peut aussi envisager un traitement par transformée de FOURIER afin de voir toutes les résonance en  $2f_0/n$ .

### Choix de $f_0$

Un autre avantage à choisir le montage électrique est que l'on peut choisir  $f_0$  assez élevé, de sorte que le critère de résonance soit bien plus pertinent ! On n'aura pas à attendre 2,3 périodes mais plutôt 2,3 secondes qui correspondront à plusieurs centaines de périodes !