

# Physique non-linéaire

## I- Oscillations libres

### 1° Oscillateur harmonique

But

Présenter d'une manière différente pour mieux comprendre les systèmes plus compliqués.

$$\textcircled{1} \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \rightarrow \quad x(t) = x_0 \cos(\omega t)$$

Oscillations dont la période est indépendante de l'amplitude

⇒ Cas très particuliers

⇒ Méthode propre à ce cas et s'adapte mal à des systèmes plus complexes

Une autre façon de voir les choses serait

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\omega^2 x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

2 ODE

\* Multiplier l'équation  $\textcircled{1}$  par  $\dot{x}$  puis intégrer :

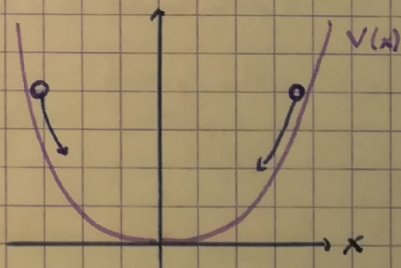
$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x^2 = E = \text{cste}$$

$E$  potentielle  $V(x)$

L'énergie est conservée car on a

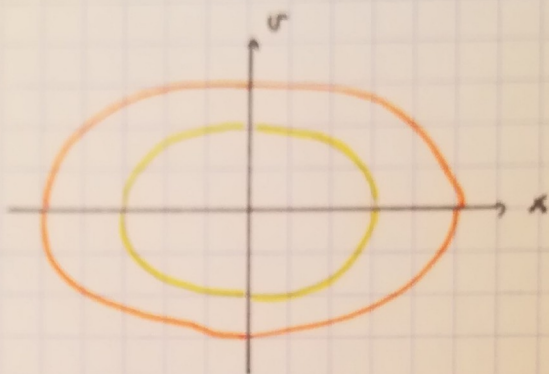
négligé les frottements (mais ceux-ci

peuvent être pris en compte)



## \* Notion de portrait de phase

L'état du système à l'instant  $t$  est donné par la position  $x$  et la vitesse  $v = \dot{x}$



Chaque courbe traduit un mouvement périodique dans ce plan de phase

## \* Définition de la linéarité

ex: L'effet est proportionnel à la cause. Un SD sera dit **linéaire** si les équations qui le caractérisent ne contiennent que des termes linéaires.

## \* Principe de superposition

Dans un SD linéaire,

- A la somme de 2 entrées, correspond la somme des deux sorties correspondantes
- Au produit  $\text{-----}$  le produit  $\text{-----}$

## \* Isochronisme des oscillations

Le cas du potentiel quadratique est très exceptionnel puisque la période des oscillations est indépendante de l'amplitude

Ex:

*	OH	} c'est l'exception plutôt que la règle
*	Loi d'Ohm	
*	Optique géométrique	

linéarité  $\Rightarrow$  Potentiel quadratique  $\Rightarrow$  Isochronisme

## 2: Oscillation du pendule

ⓐ Remarques introductives

L'équation du pendule s'écrit

$$m l^2 \ddot{\theta} + m g l \sin \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$$

avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

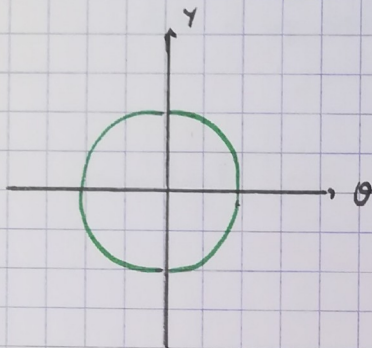
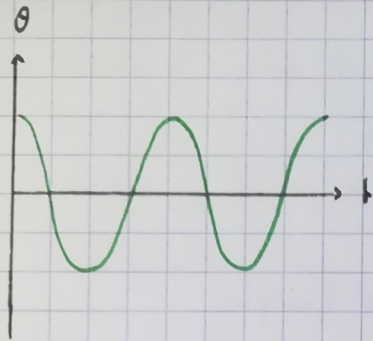
C'est une équation TRÈS importante (autant que OH ou Schrödinger)  
car on essaie toujours de s'y ramener

Rq: Si  $\theta \ll 1$ , alors on a un OH... Mais nous on va pas faire ça!

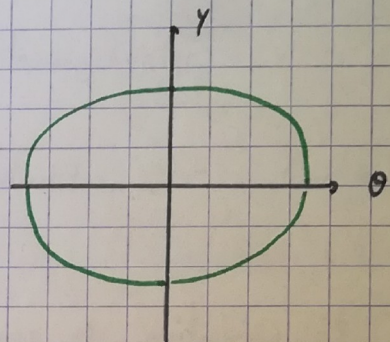
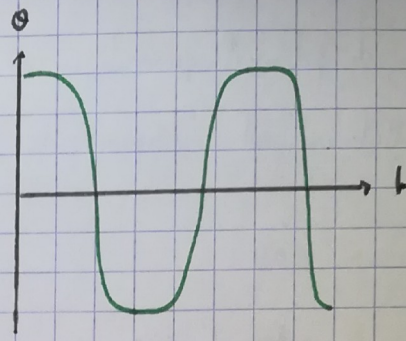
On peut réécrire cette équation sous forme d'un système dynamique

non-linéaire:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 \sin \theta \end{cases}$$



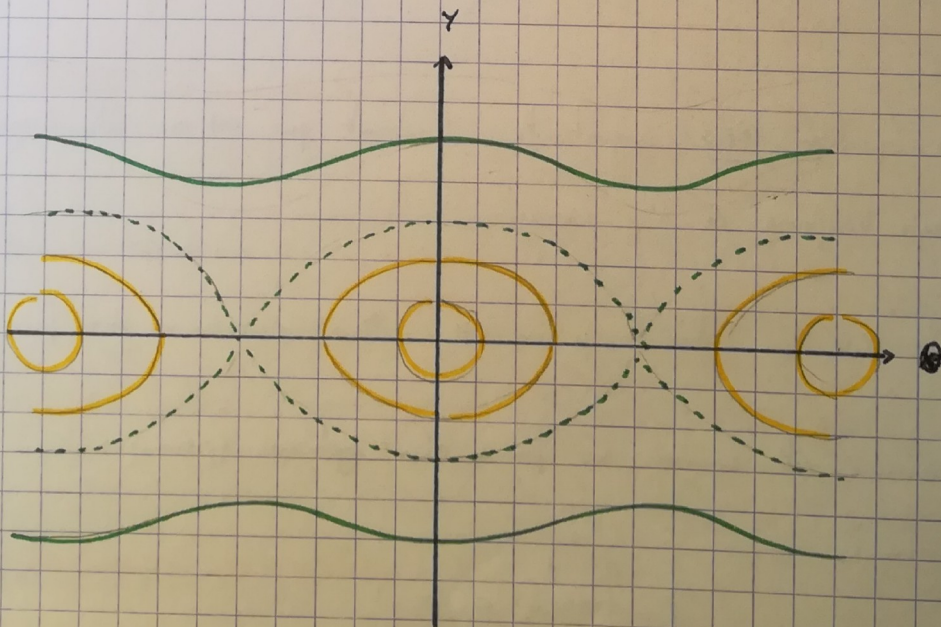
petits angles



grands angles

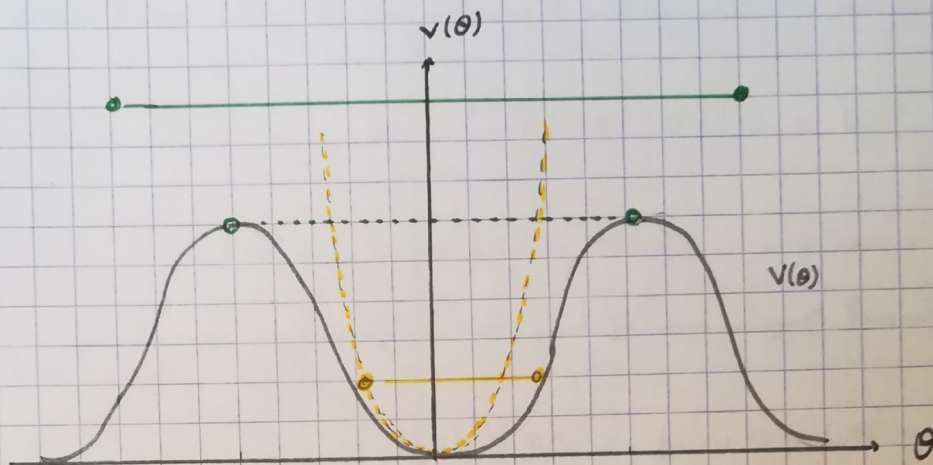
Et le cas limite, c'est si on commence à  $\theta = \pi$ , le pendule tombe puis remonte et revient à  $\theta = \pi$  après un temps infini.

⇒ Dépendance de la période avec l'amplitude



Essayer de caractériser les trajectoires de manière analytique :

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \underbrace{\omega_0^2 (1 - \cos \theta)}_{V(\theta)} = E$$



On a alors trois cas possibles :

- 1)  $E < 2\omega_0^2 \rightarrow$  Oscillations dans un puits de potentiel  
(période dépend de l'amplitude)
- 2)  $E = 2\omega_0^2 \rightarrow$  Cas limite : temps infini pour remonter
- 3)  $E > 2\omega_0^2 \rightarrow$  Pendule tourne sans arrêt dans la même direction

(b) Calcul de la période

$$E = 2\omega_0^2 \cos \theta_0$$

$$\frac{T}{2} = \int_0^{\pi/2} dt = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{dt}{d\theta} d\theta = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2\omega_0^2 (\cos \theta - \cos \theta_0)}}$$

1<sup>re</sup> Méthode : En utilise des fonctions spéciales qui généralisent les fonctions trigonométriques : les fonctions elliptiques

$$T = \frac{2\sqrt{2}}{\omega_0} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = T_0 \frac{2}{\pi} K(\sin \theta_0/2)$$

où  $K$  est l'intégrale de 1<sup>ère</sup> espèce

2<sup>ème</sup> méthode : On utilise l'équation au 1<sup>er</sup> ordre non-pénécine :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 (\theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \dots) = 0$$

On a aussi que  $\sin^3 \theta = \frac{1}{4} (3 \sin \theta - \sin 3\theta)$

Cette formule suggère une solution sous la forme

$$\theta(t) = \theta_0 \sin \omega t + \epsilon \theta_0 \sin(3\omega t) + \dots$$

Hyp :  $\epsilon \ll 1$

En réinjectant cet Ansatz dans l'équation

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \theta_0 \sin \omega t - 9\omega_0^2 \epsilon \theta_0 \sin 3\omega t$$

$$\omega_0^2 \theta = \omega^2 \theta_0 \sin \omega t + \omega_0^2 \epsilon \theta_0 \sin 3\omega t$$

$$-\omega_0^2 \frac{\theta^3}{6} = -\frac{\omega_0^2}{6} (\theta_0^3 \sin^3 \omega t + 3\epsilon \theta_0^3 \sin^2 \omega t \sin 3\omega t)$$

$$-\omega_0^2 \frac{\theta^3}{6} = -\frac{\omega_0^2}{6} \theta_0^3 \sin \omega t + \frac{\omega_0^2}{6} \theta_0^3 \left( \frac{1}{4} - 3\epsilon \sin^3 \omega t \right) \sin 3\omega t$$

En sommant ces trois contributions, on a

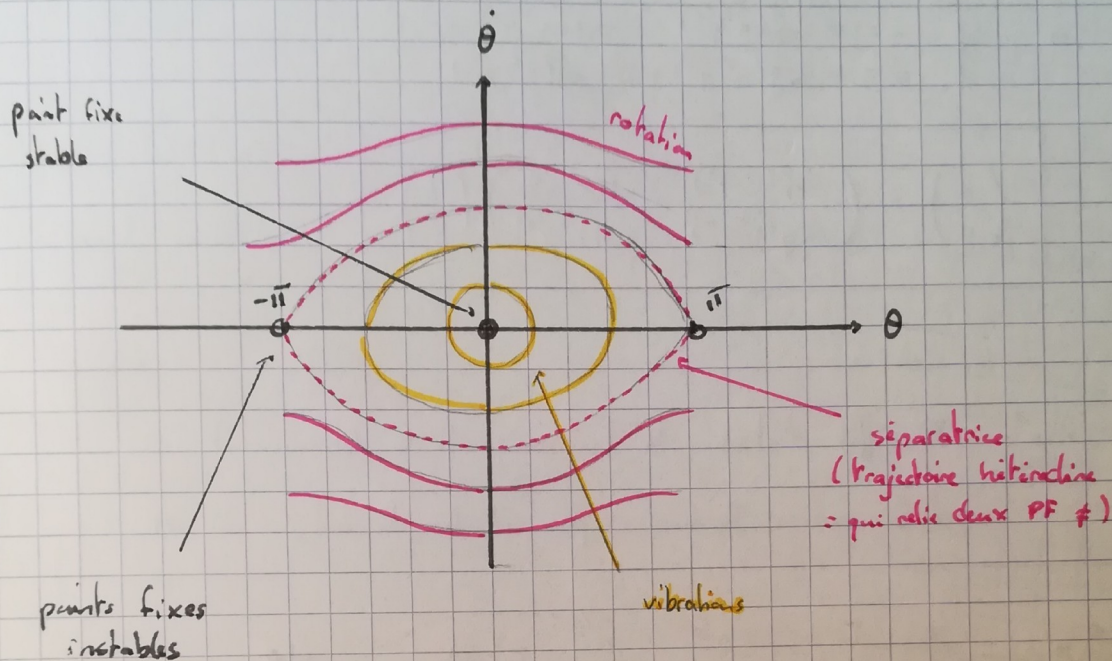
$$0 = \sin \omega t (\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{1}{8}\omega_0^2 \theta_0^2) + \sin(3\omega t) (\epsilon \omega_0^2 - 9\epsilon \omega^2 + \frac{\omega_0^2 \theta_0^2}{24})$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{8}\omega_0^2 \theta_0^2$$

$$\Rightarrow T = T_0 \left( 1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right)$$

Formule de Borda

- Apparition d'harmoniques
- Perte d'isochronisme ( $\Rightarrow$  synchronisation)
- L'annulation de la seconde partie conduit à  $\epsilon = \frac{\theta_0^2}{192} \ll 1$



Une trajectoire hétérocline relie deux PF différents

Une trajectoire homocline relie un PF à lui-même.

### 3° Formulation analytique

Le type de PF peut être déterminé de manière analytique à partir des valeurs propres de la matrice qui caractérise le SD : **matrice Jacobienne**

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad \text{On étudie l'évolution} \quad \begin{cases} u = x - x^* \\ v = y - y^* \end{cases}$$

vibrations

Alors on a

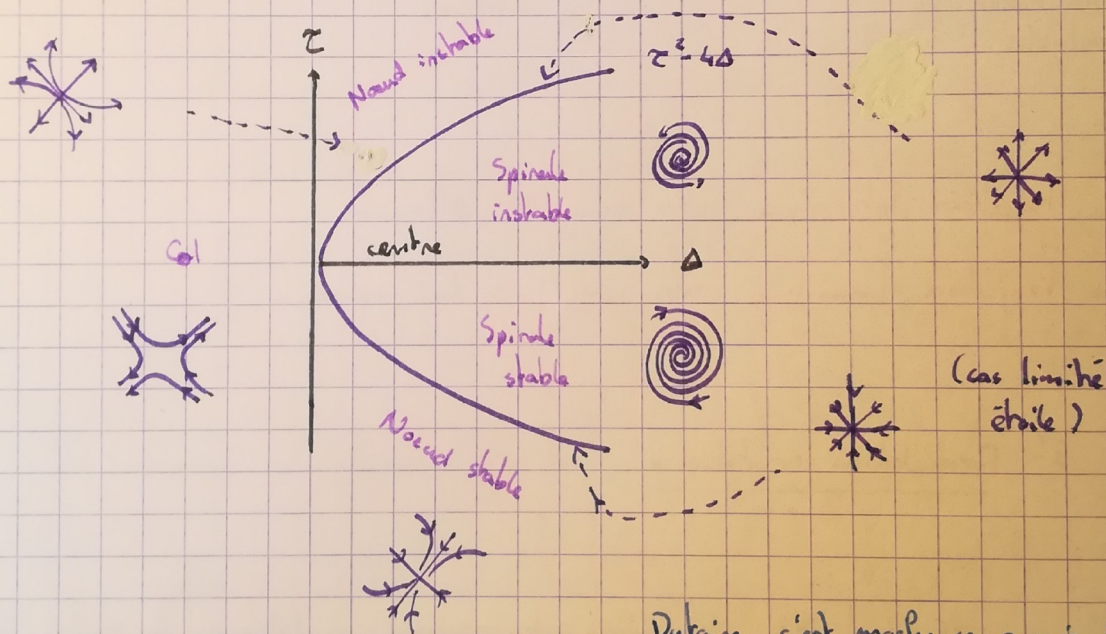
$$\dot{u} = \dot{x} = f(x, y) = f(x^* + u, y^* + v) = f(x^*, y^*) + u \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_* + v \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_*$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{u} = u \partial_x f(x^*, y^*) + v \partial_y f(x^*, y^*) \\ \dot{v} = u \partial_x g(x^*, y^*) + v \partial_y g(x^*, y^*) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x f(x^*, y^*) & \partial_y f(x^*, y^*) \\ \partial_x g(x^*, y^*) & \partial_y g(x^*, y^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

On s'est ramené à un problème linéaire !

Prop°: Il suffit d'étudier la trace  $\tau$  et le déterminant  $\Delta$  de la matrice Jacobienne pour étudier la nature du PF



Putain c'est moche ce que je fais :c

\*  $\Delta < 0 \Rightarrow \tau^2 - 4\Delta > 0$  donc 2 solutions réelles de l'équation caractéristique  
 $\Rightarrow$  deux valeurs propres de signe opposé  $\Rightarrow$  col

\*  $\Delta > 0 \Rightarrow$  si  $\tau^2 - 4\Delta > 0$ , il existe deux vap réelles  $\Rightarrow$  nœuds  
si  $\tau^2 - 4\Delta < 0$ , les vap sont complexes conjuguées  $\Rightarrow$  spirales



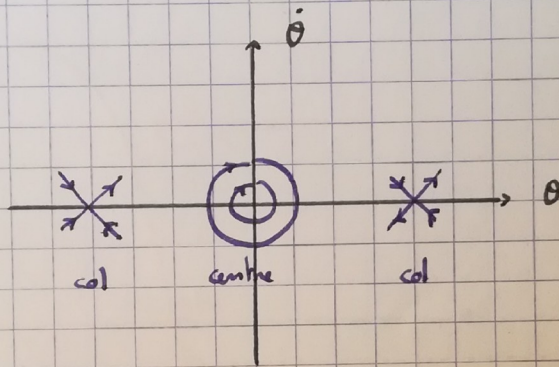
Revenons au cas du pendule :

La matrice Jacobiennne est à étudier autour des points fixes  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} \pm\pi \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

\*  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = \pm i \Rightarrow \text{centre}$

\*  $\begin{pmatrix} \pm\pi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = \pm 1 \Rightarrow \text{col}$



Bilan

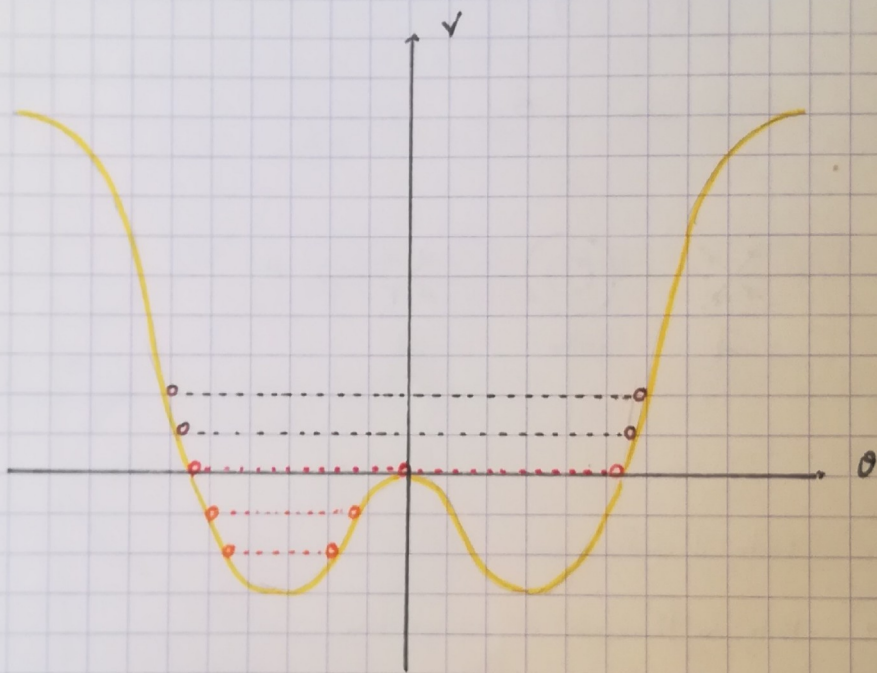
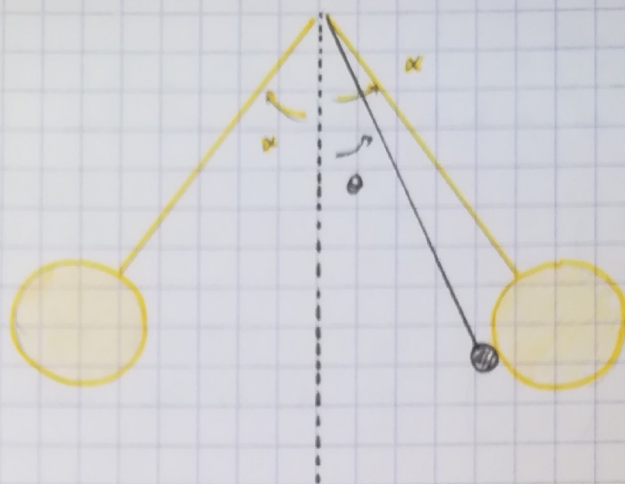
→ Perte d'isochronisme

→ Perte du théorème de superposition

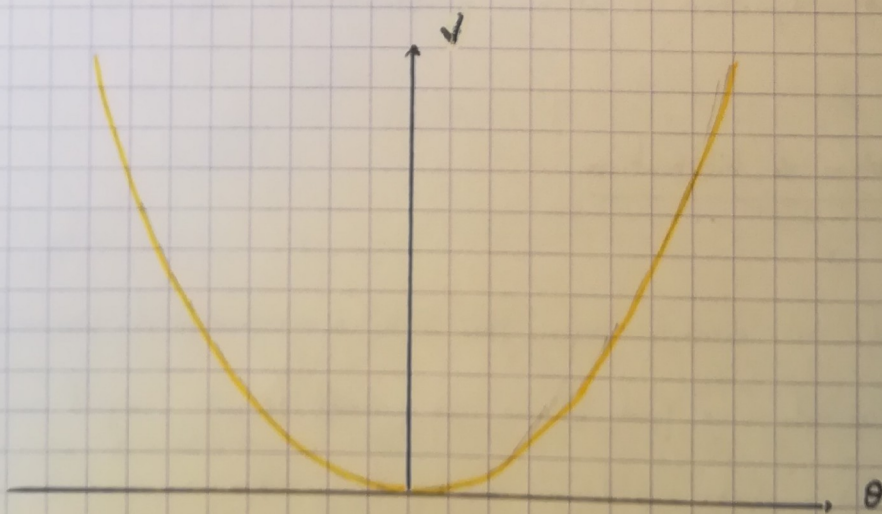
→ Apparitions de solutions qualitativement différentes

#### 4° Notion de bifurcation

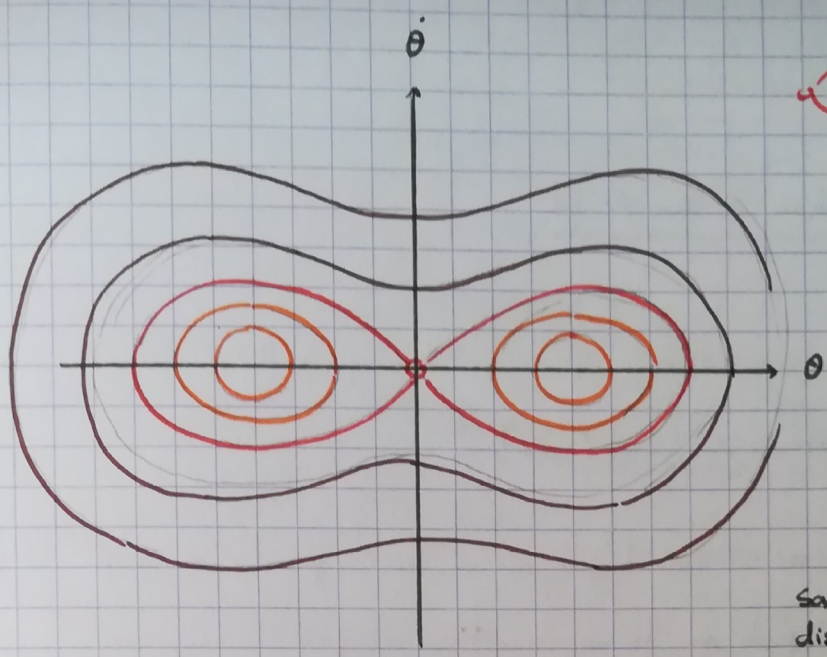
- L'étude des SD devient encore plus riche si on modifie les paramètres ext<sup>s</sup>
- Pour étudier cela, on peut utiliser un pendule pesant, auquel on ajoute deux aimants identiques aux positions  $\pm\alpha$



$\alpha \neq 0$

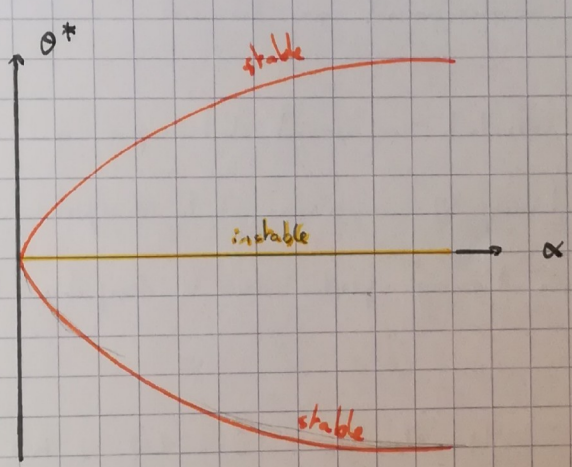


$\alpha = 0$



projectoire  
homocline

sans  
dissipation



## II. Oscillations auto-entretenues

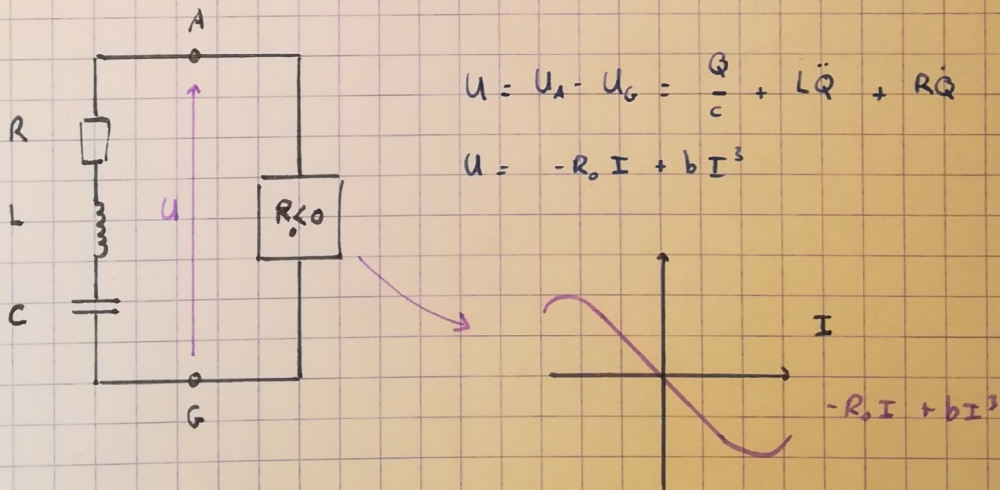
### 1. Équation de Van der Pol

Un oscillateur auto-entretenu est un oscillateur qui oscille durablement sans excitation extérieure (sans forçage)

Rq: \* L'OLT ne convient pas car on devrait prendre en compte les frottements.  
Il faut des termes non linéaires pour les compenser.

\* Un OAE est nécessairement non-linéaire.

Balthazar Van der Pol a introduit un circuit électronique qui conduit à une équation avec un terme NL au niveau de la dissipation qui est indispensable pour compenser l'énergie perdue dans la dissipation linéaire.



$$U = U_A - U_G = \frac{Q}{C} + L\dot{Q} + R\dot{Q}$$

$$U = -R_0 I + b I^3$$

$$\Rightarrow L\ddot{I} + (R - R_0 + 3bI^2)\dot{I} + \frac{1}{C}I = 0$$

On peut même faire un changement de variables

$$\begin{cases} z = \sqrt{Lc} \\ x = I/I_0 \end{cases}$$

Et on choisit  $R_0 - R = 3bI^2$  et on pose  $\mu = (R_0 - R) \sqrt{\frac{c}{L}}$

Et on a donc l'équation suivante :

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

- Si  $|x| > 1$ , la friction est positive  $\Rightarrow$  convergence  
→ Si  $|x| < 1$ , la friction est négative  $\Rightarrow$  divergence }  $\sim$  cycle

1) On cherche les PF :

$$\begin{cases} \dot{y} = x \\ \ddot{y} = -\mu(x^2 - 1)y - x \end{cases} \Rightarrow (x^*, y^*) = (0, 0)$$

unique PF

2) On s'intéresse à la nature du PF

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\mu x^* y^* - 1 & -\mu(x^{*2} - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}$$

les valeurs propres vérifient

$$\lambda^2 - \mu\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \text{discrim} = \mu^2 - 4$$

$$\Rightarrow 0 < \mu < 2 \Rightarrow \lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(\mu \pm i\sqrt{4 - \mu^2})$$

$\Rightarrow$  spirale instable

logique car si  $|x| < 0$   
 $x$  doit augmenter !

$$\Rightarrow \mu = 2 \Rightarrow \lambda_{\pm} = 1 \text{ (vap double)} \Rightarrow \text{noeud instable}$$

$$\Rightarrow \mu > 2 \Rightarrow \lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}) \Rightarrow \text{noeud instable}$$

Donc  $\forall \mu$ , on a bien un point fixe instable.

## 2° Oscillations de relaxation

a) Analyse du plan de phase lorsque  $\mu \gg 1$

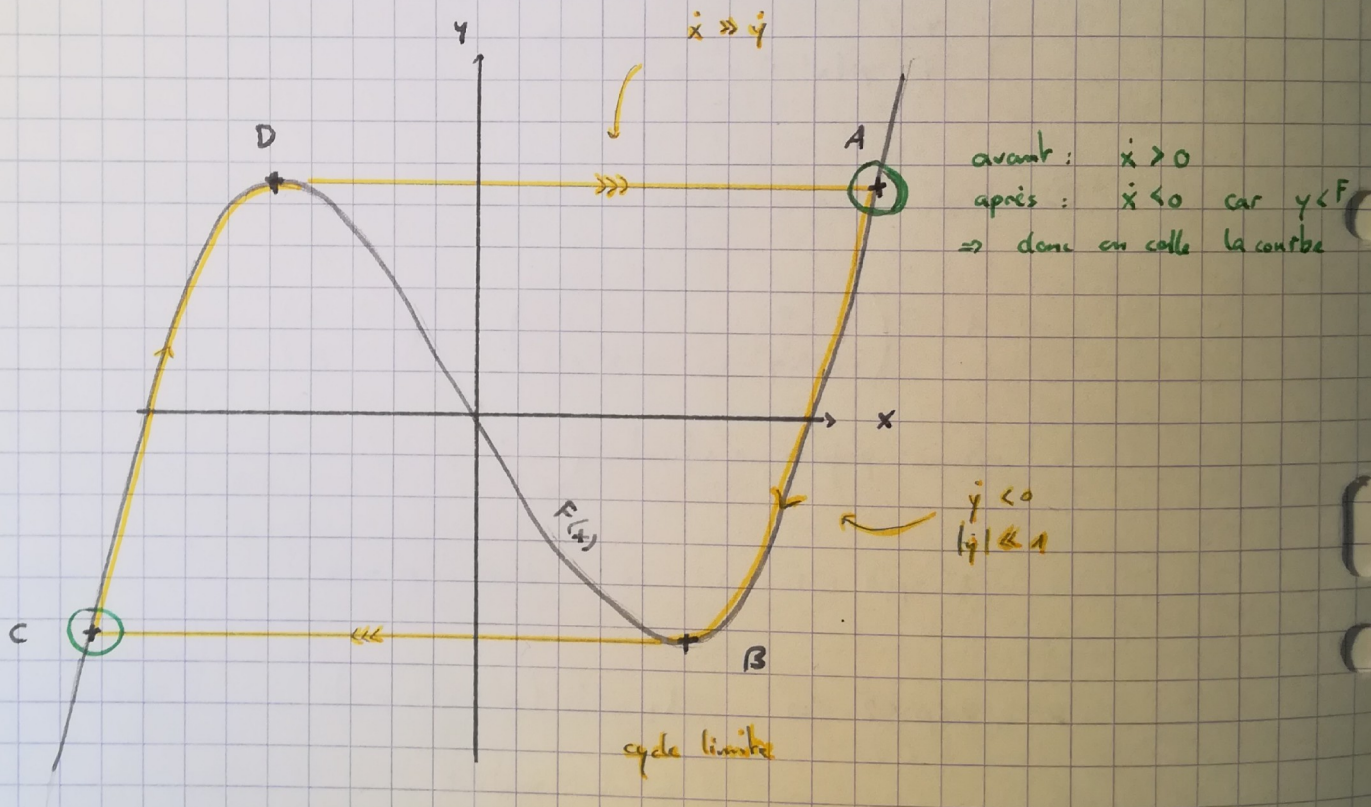
On note un peu sur Van der Pol :

$$-x = \ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} = \frac{d}{dz} \left( \dot{x} + \mu \left( \frac{x^3}{3} - x \right) \right)$$

Si on pose  $w = \dot{x} + \mu F(x)$

Alors  $\dot{w} = -x$

On pose  $y = w/\mu$  de sorte que  $\begin{cases} \dot{x} = \mu(y - F(x)) \\ \dot{y} = -x/\mu \end{cases}$



b) Calcul de l'ordre grandeur de la période pour  $\mu \gg 1$

$$T = T_{AB} + T_{BC} + T_{CD} + T_{DA} \sim 2 T_{AB}$$

$$T = 2 \int_{x_A}^{x_B} dt = 2 \int_{x_A}^{x_B} \frac{dt}{\frac{dx}{dt}} dx$$

$y = F(x)$  le long de la courbe

$$G_2 \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = F'(x) \frac{dx}{dt} = (x^2 - 1) \frac{dx}{dt} = -\frac{x}{\mu}$$

$$\text{Donc} \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{x}{\mu} \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$\text{Ainsi} \quad T = -2\mu \int_{x_A}^{x_B} \left(x - \frac{1}{x}\right) dx = -2\mu \left(\frac{1}{2} - 2 + \ln 2\right)$$

$$\underline{\underline{T = \mu(3 - 2\ln 2) \sim \mu}}$$

le cycle limite est parcouru avec

→ deux parties très rapides ( $T \sim 1/\mu$ )

→ deux parties très lentes ( $T \sim \mu$ )

③ Méthode des échelles multiples dans le cas  $\mu \ll 1$

On note à présent  $\mu = \varepsilon \ll 1$

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

On cherche une solution de cette ODE du 2<sup>e</sup> ordre NL sous la forme d'une somme de fonctions qui dépendent des variables temporelles  $\tau_i = \varepsilon^i t$

$$x(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i x_i(\tau_0, \dots)$$

$$\text{Ainsi} \quad d/dt = \partial_{\tau_0} + \varepsilon \partial_{\tau_1} + \varepsilon^2 \partial_{\tau_2} + \dots$$

$$\text{Donc} \quad d^2/dt^2 = \partial_{\tau_0}^2 + 2\varepsilon \partial_{\tau_0\tau_1} + \dots$$

Alors l'équation devient

$$(\partial_{\tau_0}^2 + 2\varepsilon \partial_{\tau_0\tau_1})(x_0 + \varepsilon x_1) + \varepsilon(x_0^2 + 2\varepsilon x_0 x_1 - 1)(\partial_{\tau_0} + \varepsilon \partial_{\tau_1})(x_0 + \varepsilon x_1) + (x_0 + \varepsilon x_1) = 0$$

À l'ordre le plus bas, on a

amplitude

phase

$$\mathcal{L}(x_0) = \partial_z^2 x_0 + x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = r(z_0, z_2, \dots) \cos(z_0 + \phi(z_2, \dots))$$

C'est un oscillateur harmonique sans dissipation.

Puis à l'ordre 1,

$$\partial_z^2 x_1 + 2 \partial_{z_0 z_2} x_0 + (x_0^2 - 1) \partial_z x_0 + x_1 = 0$$

$$\mathcal{L}(x_1) = \underbrace{\partial_z^2 x_1 + x_1}_{OH} = -2 \partial_{z_0 z_2} x_0 - (x_0^2 - 1) \partial_z x_0 = \mathcal{N}_1(x_0)$$

Le terme  $x_1$  est un OH forcé par des termes NL d'une fonction  $x_0$  qui est solution du même opérateur  $\mathcal{L}$  (mais sans forçage)

- ⇒ On force de manière résonnante (au moins en partie)
- ⇒ Il faut absolument empêcher la divergence (car le développement n'est possible que si toutes les  $x_i$  sont du même ordre)

On note  $r' = \partial_{z_2} r$ , on a

$$x_0 = r \cos(z_0 + \phi)$$

$$\mathcal{N}_1(x_0) = -(-r' \sin(z_0 + \phi) - r \phi' \cos(z_0 + \phi)) + (r^2 \cos^2(z_0 + \phi) - 1) r \sin(z_0 + \phi)$$

$$\mathcal{N}_1(x_0) = \sin(z_0 + \phi) (2r' - r + \frac{1}{4} r^3) - 2r \phi' \cos(z_0 + \phi) + \frac{1}{4} r^3 \sin(3(z_0 + \phi))$$

Il faut donc annuler les forçages résonnants (et pulsation 1)

$$\begin{cases} r \phi' = 0 \\ 2r' - r + \frac{1}{4} r^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \phi = \phi(z_2, \dots)$$



La dernière équation est un SD du 1<sup>er</sup> ordre qui a des PF :

$$r' = \frac{r}{2} \left( 1 - \frac{r^2}{4} \right) \Rightarrow \text{PF} = \{0, 2\}$$

instable  $\leftarrow$   $\rightarrow$  stable

Puisque  $r=2$  est stable, on a  $\lim_{z \rightarrow \infty} r = 2$  et la trajectoire à l'ordre jéro est alors

$$x_0 = 2 \cos(\tau_0 + \phi(\tau_2, \dots))$$

→ Cycle limite circulaire de rayon 2

→ On ne s'intéresse pas au régime transitoire  $r \leq 2$

### d) Analyse énergétique

On pose à présent  $y = \sqrt{E} x$  de sorte que

$$\ddot{y} - (E - y^2) \dot{y} + y = 0$$

On note  $E = \frac{1}{2} \dot{y}^2 + \frac{1}{2} y^2$  l'énergie mécanique de P'OH

$$\frac{dE}{dt} = y(\ddot{y} + y) = (E - y^2) \dot{y}^2$$

L'énergie moyenne d'un oscillateur auto-entretenu est constante :

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{1}{z} \int_{t_0}^{t_0+z} \frac{dE}{dt} dt = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{E(t_0+z) - E(t_0)}{z} = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \overline{\frac{dE}{dt}} = \overline{(E - y^2) \dot{y}^2} = E \overline{\dot{y}^2} - \overline{y^2 \dot{y}^2}$$

Ainsi la production d'énergie  $(E \dot{y}^2)$  produisant l'instabilité à longue exactement compensée par la présence de la non-linéarité  $(y^2 \dot{y}^2)$  en moyenne.

Rq : Un calcul approché permet de trouver le résultat obtenu par la méthode des échelles multiples en utilisant cette méthode énergétique

On suppose que pour  $\epsilon \ll 1$ , le cycle limite a une expression proche de

$$y(t) = \rho \sin t \quad (\text{solution de l'ODE pour } \epsilon = 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{\dot{y}^2} = \frac{1}{2} \rho^2 \\ \overline{y^2 \dot{y}^2} = \frac{1}{8} \rho^4 \end{cases}$$

$$\text{Et pour avoir } \epsilon \overline{\dot{y}^2} = \overline{y^2 \dot{y}^2}, \text{ il faut } \rho = 2\sqrt{\epsilon}$$

$$\Rightarrow y(t) = 2\sqrt{\epsilon} \sin t \Rightarrow \underline{\underline{x(t) = 2 \sin t}}$$

On retrouve bien la même solution.

### 3° Bifurcation de Hopf

⊗ Introduction

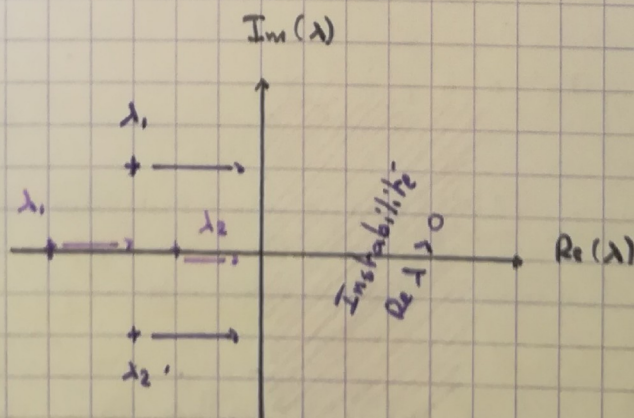
à 2 Dimensions

✓

Quelles sont les possibilités pour qu'un SD perde sa stabilité ?

⇒ la réponse se trouve dans les valeurs propres du Jacobien, solutions du polynôme caractéristique

↳ sol° réelles  
↳ sol° complexes conjuguées



\*  $\lambda_1 = \lambda_2$  : C'est le cas de la bifurcation de Hopf qui donne naissance à un cycle limite par franchissement d'une valeur critique

→ amplitude proportionnelle à  $\sqrt{\varepsilon - \varepsilon_c}$

→ période indépendante de cet écart (à l'ordre 1)

→ expérience de Belousov-Zhabotinski

(cf. Shalashvili (1985) Cerium catalyzed Bromate-

Malonic Acid Reaction, Chemical Demonstrations 2, p. 257)

- Suivi potentiométrique de la réaction d'oxydo-réduction

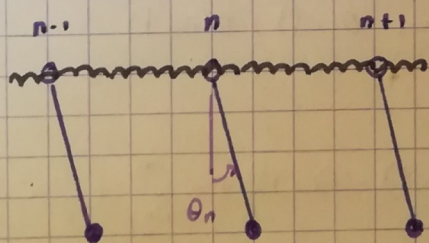
(Électrode de platine - Électrode de sulfate mercureux)

- Enregistrement à l'aide d'un spectrophotomètre BUP 96 p571

↳ préparat° : enregistrement à T ambiante (~ 15 minutes)

↳ en live : au bain-marie (~ 3 minutes)

### III - Oscillations couplées : la chaîne de pendules comme introduction aux solitons



#### 1: Introduction

Chaque pendule repère par  $\theta_n$ .

Ils sont couplés grâce à un ressort

de torsion.

On commence par écrire le Hamiltonien du système

$$H = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} I \dot{\theta}_n^2 + \frac{c}{2} (\theta_n - \theta_{n+1})^2 + mgl (1 - \cos \theta_n)$$

On introduit le moment conjugué à  $\theta_n$  :

$$p_n = I \dot{\theta}_n$$

De sorte que les équations soient

$$\frac{d\theta_n}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_n} \quad \text{et} \quad \frac{dp_n}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial \theta_n}$$

La deuxième équation introduit  $N$  équations différentielles ordinaires sur les  $\theta_n$ , couplées entre elles et non-linéaires :

$$I \frac{d^2 \theta_n}{dt^2} - c (\theta_{n+1} + \theta_{n-1} - 2\theta_n) + mgl \sin \theta_n = 0$$

On a alors besoin d'approximation...

Approximation  
des angles  
petits

Valable seulement si le couplage est fort de sorte  
que  $\theta_n \sim \theta_{n\pm 1}$ .

On remplace la variable  $\theta_n(t)$  par  $\theta(x,t) = \theta(na,t)$

Alors on peut écrire  $\theta_{n\pm 1}(t) = \theta(x \pm a, t) = \theta(x,t) \pm a \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$

Et l'équation se réécrit

$$I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - ca^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + mgl \sin \theta = 0$$

Introduisons  $\omega_0^2 = \frac{mg\rho}{I}$  et  $\omega^2 = \frac{Ca^2}{I}$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c_a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$$

(Équation de Sine-Gordon)

L'équation de SG est l'une des 3 équations ayant des solutions solitons

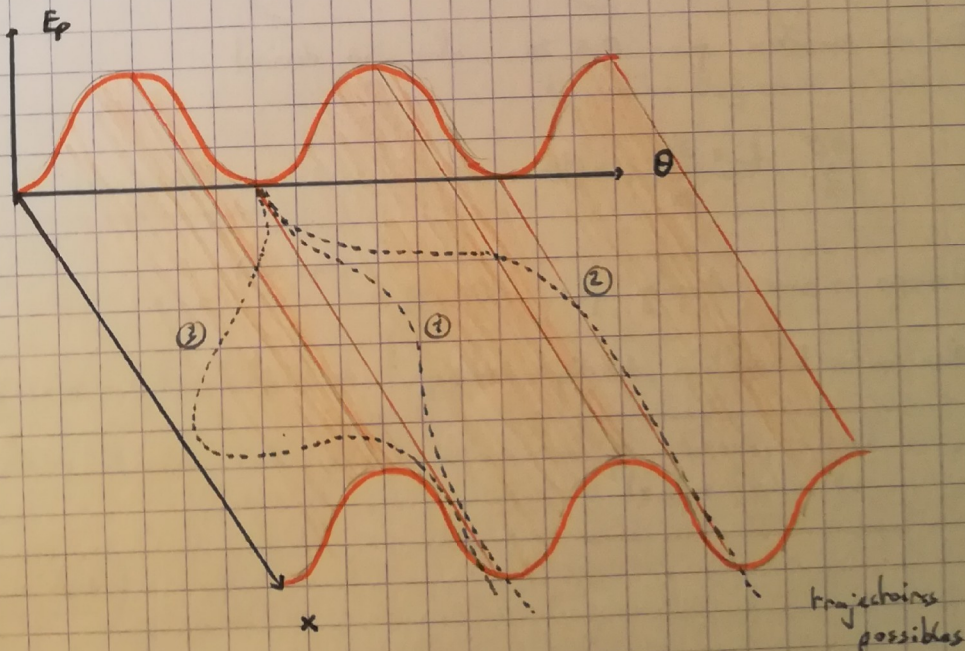
- Tsunami
- 1) Sine-Gordon
  - 2) Korteweg de Vries
  - 3) Schrödinger NL

3 équations aux propriétés mathématiquement remarquables  
↑ intégrables

Optique + plasma

## 2: Topologie du paysage énergétique

Tracons l'énergie potentielle dans les variables  $(x, \theta)$ :



trajectoires possibles

\* le potentiel possède plusieurs états fondamentaux dégénérés énergétiquement  
 $\theta = 0, 2\pi, 4\pi \dots$

\* Cette dégénérescence permet de décrire plusieurs familles de solutions

- ① Toute la chaîne est dans une vallée
- ② la chaîne pass d'une vallée à la suivante
- ③ la chaîne revient à la vallée initiale
- ④ la chaîne relie trois vallées

} topologiquement différentes

\* On distingue ces solutions par leur comportement à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \theta - \lim_{x \rightarrow -\infty} \theta = \begin{cases} \text{① ⑤} & 0 \\ \text{②} & \pm 2\pi \\ \text{④} & 4\pi \dots \end{cases}$$

3° Solution de faible amplitude : le régime linéaire

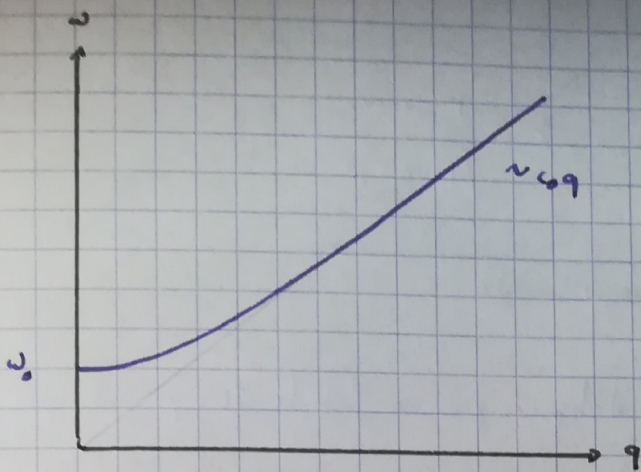
Ici on considère que  $\theta \ll 2\pi$ , alors SG devient

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \omega_0^2 \theta = 0$$

Prenons comme Ansatz que  $\theta = \theta_0 e^{-i(\gamma x - \omega t)} + cc$

Alors on a la relation de dispersion

$$\omega^2 = \omega_0^2 + (c_0 \gamma)^2$$

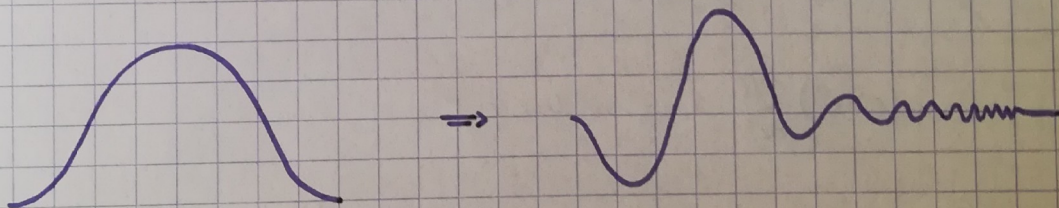


Il s'agit d'une relation de dispersion pour laquelle

$$v_g = \frac{\omega}{q} = v_g(q) = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + (cq)^2}}{q}$$

Ondes dispersives

C'est le terme  $\omega_0^2$  qui est responsable de la dispersion... On remarque que  $v_g$  décroît avec  $q$  donc



les petites longueurs d'ondes vont plus vite.

4: Solutions solitaires

Pour déterminer les solutions de l'équation de Schrödinger, on peut remarquer que celle-ci est invariante par transformation de Lorentz à vitesse  $c$ .

↑

1<sup>re</sup> méthode

$$\xi = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c_0}\right)^2}} \quad \zeta = \frac{t - xv/c_0^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c_0}\right)^2}}$$

~ Boost de Lorentz

On cherche les solutions stationnaires puis on fait la TL pour trouver les solutions à la vitesse  $v$

2<sup>e</sup> méthode

Cherchons des solutions à profil constant se déplaçant à  $v$

On pose alors  $z = x - vt$

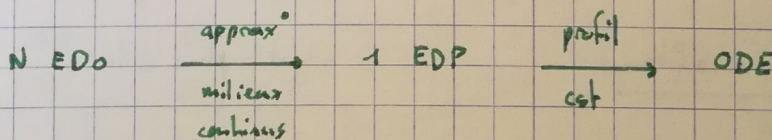
$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_t = -v \partial_z \\ \partial_x = \partial_z \end{cases}$$

Ainsi l'équation devient

$$v^2 \partial_{zz} \theta - c_0^2 \partial_{zz} \theta + \omega_0^2 \sin \theta = 0$$

$$(v^2 - c_0^2) \frac{d^2 \theta}{dz^2} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$$

On se ramène à un truc qu'on connaît !



$$\frac{d^2 \theta}{dz^2} = \frac{\omega_0^2}{c_0^2 - v^2} \sin \theta$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\theta}{dz} \right)^2 = \frac{\omega_0^2}{c_0^2 - v^2} (-\cos \theta) + c$$

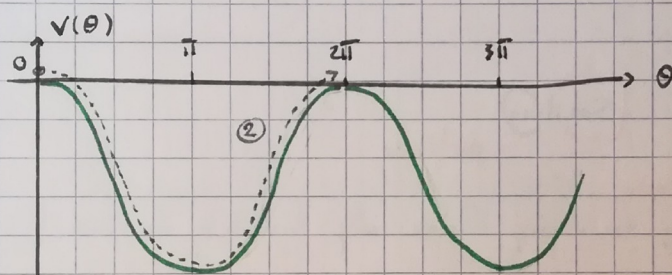


On trouve la constante  $c$  avec  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{d\theta}{dz} = 0$

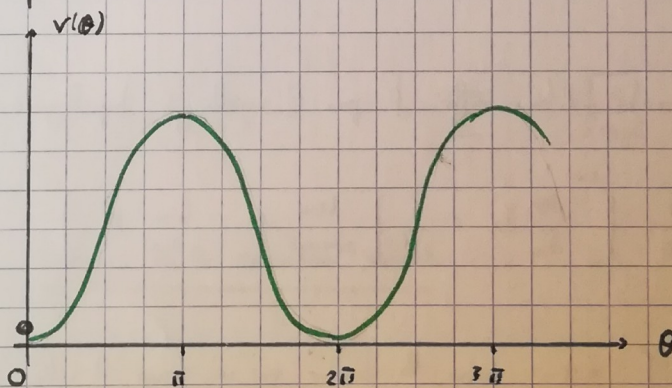
$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\theta}{dz} \right)^2 - \frac{\omega_0^2}{c_0^2 - v^2} (1 - \cos \theta) = 0$$

Considérons cette expression comme la somme d'une  $E_c$  et d'une  $E_p$   
 d'une particule fictive repérée par

- sa position  $\theta$
- son temps  $z$
- sa masse 1
- son énergie potentielle  $V(\theta) = - \frac{\omega_0^2}{c_0^2 - v^2} (1 - \cos \theta)$



$c_0^2 > v^2$



$c_0^2 < v^2$

Une seule solution  $\theta = 0$   
 $\Rightarrow$  nul

Et dans le premier cas, on voit que la particule tombe dans une vallée  
 puis met un temps infini à "remonter" dans la voisine (chemin ②)

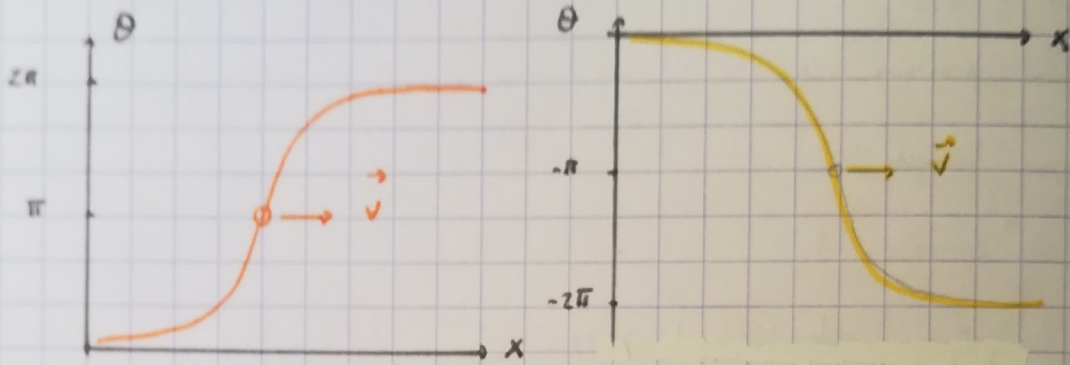
$\Rightarrow$  les chemins ③ et ④ sont impossibles

$\Rightarrow$  Uniquement des solutions sub-soniques

Si on repasse en  $(x, t)$ , on peut alors exprimer

$$\theta(x, t) = 4 \arctan \exp \left( \pm \frac{w_0 (x - x_0)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right)$$

On retrouve le coefficient de Lorentz !



Soliton

Anti-soliton

seul  
ondulatoire

Soliton

particule

à l'époque, on voulait expliquer la physique des particules avec ça

NB : Soliton et anti-soliton diffèrent par leur charge topologique

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \theta}{\partial x} dx = \frac{1}{2\pi} \left[ \lim_{x \rightarrow +\infty} \theta - \lim_{x \rightarrow -\infty} \theta \right]$$

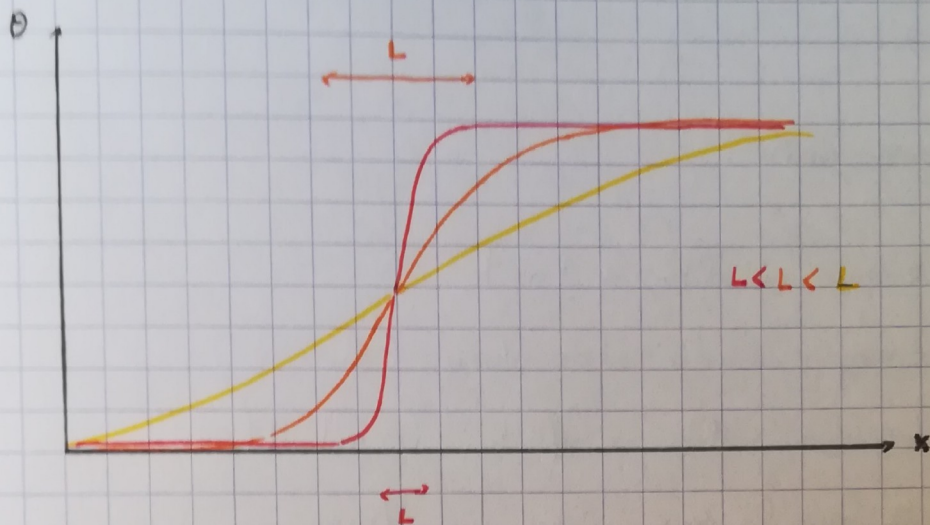
$$Q = \begin{cases} +1 & \text{pour la chaîne qui va de gauche à droite} \\ -1 & \text{pour la chaîne qui va de droite à gauche} \end{cases}$$

La charge topologique est un invariant

Retour sur ABL (milieux continus)

Puisque  $\theta = 4 \arctan \exp \frac{x-ut}{L}$  avec  $L = \frac{c_0}{\omega_0} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}$

Alors  $L$  est la taille du soliton :



Donc P' ABL est d'autant plus valable que  $L$  est grand (le soliton ne voit pas la gravité), ie lorsque le couplage est grand

**NB :** longueur au repos  $L_0 = \frac{c_0}{\omega_0} = a \sqrt{\frac{c}{mgl}}$

On compare  $L_0$  de  $a$

5° Énergie de la solution soliton

La densité hamiltonienne est

$$\mathcal{H} = \frac{1}{a} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + \frac{c_0^2}{2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + mgl (1 - \cos \theta) \right)$$

D'où on obtient P' énergie par intégration.

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} H dx = \frac{8I\omega_0 c_0}{\sqrt{1-(v/c_0)^2}} = \gamma m_0 c_0^2$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c_0)^2}}$$

$$m_0 = \frac{8I\omega_0}{c_0}$$

Manip avec chaîne :

- ① Envoyer un soliton et l'autre
- ② Envoyer un autre soliton dessous (choc)
- ③ Laisser un soliton se réfléchir ( $\rightarrow$  antisoliton)
- ④ Enligner les deux : choc puis réflexion  
 $\rightarrow$  soliton + antisoliton = 0

Si le couplage diminue on a instabilité modulationnelle

$\Rightarrow$  Énergie localisée sur certains pendules

## IV - Synchronisation d'oscillateurs

De nombreuses oscillateurs (naturels ou fabriqués par l'homme) sont capables d'ajuster leur rythme en présence d'une interaction faible.

Pour avoir cet ajustement, il faut nécessairement que l'oscillateur ne soit PAS linéaire ! (donc NL)

- Exemple :
- 2 LASERS couplés
  - les cellules d'un pacemaker
  - les violons d'un orchestre jouant à l'unisson

Le phénomène de synchronisation est une manifestation de l'effet découvert par Huygens qui se faisait choir dans sa chambre avec deux pendules.