LP07 - Dynamique relativiste

Cléments (de la Salle + Colléaux)

24 avril 2020

Niveau : L2/3

Bibliographie

- ✍ *Méca*, **BFR** → à lire, askip trop bien
- ✍ **Hladik** →
- ✍ **Langlois** →
- ✍ *Dictionnaire de la physique*, **Taillet**, →
- ✍ *Relativité restreinte, base et applications*, **Semay**, →

Prérequis

- ➢ Cinélatique relativiste
- ➢ Notion de photon

Expériences

- ☕ Fabriquer un accélérateur cyclotron ou un synchrotron ?

Table des matières

Introduction

✍ *BFR p.252*

Les lois de la Mécanique classique et notamment le Principe Fondamental de la Dynamique datent des travaux de Newton du XVI^e. Ces lois ont longtemps permis de comprendre les systèmes physiques mais cette mécanique newtonienne a été supplantée par la théorie de la relativité d'Einstein au XX^e. Cependant, le PFD restait un outil très puissant pour étudier des systèmes à échelle humaine ! Le cours d'aujourd'hui portera d'une manière plus générale sur la formulation de la dynamique relativiste en se basant sur ce qui a déjà été vu en cinématique relativiste.

Plan

On peut aussi imaginer faire juste la collision élastique et récupérer le temps gagné pour l'effet Doppler. Pourquoi les mettre dans une partie "phénomènes relativitses"...

1 De la dynamique newtonienne à la dynamique relativiste

1.1 Rappels

En cinématique relativiste nous avons introduit des notions importantes qui nous serviront dans cette leçon :

— la notion de temps propre d'une particule : $\mathrm{d}t = \gamma \mathrm{d}\tau$ avec $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ le facteur de Lorentz (**CdlS** : le temps propre c'est τ !)

— la notion de quadrivecteur de position : $X^\mu = (ct, x, y, z)$

— la métrique de Minkwoski $A_{1,1} = 1, A_{i,i} = -1, A_{i,j} = 0$

— **CdlS** : Le boost de Lorentz ?

— **CdlS** : La quadri-vitesse $U^\mu = (\gamma c, \gamma \vec{v})$. Elle est définie comme $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} X^\mu$ et on retrouve alors l'expression ci-dessus. Mais ce petit calcul est refait juste après pour P^μ

Lors de notre cours sur la cinématique relativiste, nous avions définit le quadri-vecteur vitesse-impulsion comme $U^\mu = (\gamma c, \gamma \vec{v})$

1.2 Quadri-vecteur énergie-impulsion

✍ *BFR p.256*

En mécanique classique, l'impulsion est définie par le produit de la masse de la particule et de sa vitesse, nous pouvons regarder ce qu'on obtient en multipliant U^μ par m la masse de la particule : (IMPORTANT)

$$\vec{\vec{\mathcal{P}}} = (m\gamma c, m\gamma \vec{v}) = (m\gamma c, \vec{p})$$

On a posé $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$ l'impulsion relativiste de la particule. On peut noter que la définition de l'impulsion est la même qu'en classique.

Comme la mécanique classique est un cas particulier de la relativité restreinte qui correspond aux vitesses faibles devant c, il est important de vérifier que les définitions que l'on va poser aujoud'hui sont compatibles avec cette limite. Ainsi, ici, $\vec{p}_{relat} = m\gamma\vec{v} = m\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\vec{v}$, un développement limité de γ en $\frac{c}{v} \ll 1$ donne $\gamma = 1$ ce qui donne $\vec{p}_{relat} = m\vec{v}$, ce qui est le résultat classique.

Regardons un peu le terme temporel de $\vec{\tilde{P}}$. $m\gamma c$ est une masse multipliée par une vitesse, ce qui n'est pas évident à interpréter. Pour faciliter l'inteprétation, on peut multiplier $\vec{\tilde{P}}$ par c, on a alors (IMPORTANT)

$$\vec{\mathcal{P}} = c \times \vec{\tilde{P}} = (m\gamma c^2, c\vec{p})$$

On retrouve alors un terme temporel qui a la dimension d'une énergie (analogie avec l'énergie cinétique d'une voiture $\frac{1}{2}mv^2$) que l'on va noter E et considérer comme l'énergie de la particule. On a $E = m\gamma c^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Un développement limité en $\frac{c}{v} \ll 1$ donne $E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \ldots$. Pour une particule au repos on retrouve la relation masse-énergie $E_0 = mc^2$. Nous reviendrons sur cette équivalence dans quelques instants mais nous pouvons déjà comprendre pourquoi les masses de particules élémentaires sont souvent données en eV, unité d'énergie (ex le proton, $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg ce qui correspond à une énergie de 938 MeV.

NB

Si on applique la relation $E = m\gamma c^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ à un photon de vitesse $v = c$, on a que le facteur γ diverge ! Pour garder une énergie finie on voit alors la nécessité de poser une masse nulle pour le photon !
CdlS : On peut malgré tout définir un quadri-vecteur énergie-impulsion pour le photon $((E/c, E/c\vec{n})$ avec $\vec{n}$ la direction de propagation.

CdlS : Moi je préfère l'autre version ;p
Avec cette défintion de l'énergie, on peut écrire

$$\vec{\mathcal{P}} = (E, c\vec{p})$$

que l'on appelle naturellement quadri-vecteur énergie impulsion.

NB

On peut aussi rencontrer le quadri-vecteur énergie impulsion défini comme

$$\vec{\tilde{\mathcal{P}}} = (E/c, \vec{p})$$

qui reste une expression tout à fait homogène et valable. Il convient alors de toujours préciser avec quelle expression on travaille. Pour la suite de ce cours, nous travaillerons avec $\vec{\mathcal{P}} = (E, c\vec{p})$

Une dernière propriété importante du quadri-vecteur énergie impulsion est la conservation de sa norme qui est indépendante du référentiel d'étude :
On a $\vec{\mathcal{P}} = (E, c\vec{p})$ et $||\vec{\mathcal{P}}|| = E^2 - p^2c^2$. On rappelle les définitions de E et $\vec{p}$

$$E = m\gamma c^2 \quad \text{et} \quad \vec{p} = m\gamma\vec{v} \quad (\implies E\vec{v} = c^2\vec{p})$$

$$||\vec{\mathcal{P}}|| = E^2 - c^2p^2 = m^2\gamma^2c^4 - m^2\gamma^2c^2v^2 = m^2\gamma^2c^4(1-\frac{v^2}{c^2}) = m^2c^4$$

CdlS : Il manque un carré non ? $||\vec{\mathcal{P}}| \to ||\vec{\mathcal{P}}||^2|$

et vaut $||\mathcal{P}||^2 = m^2c^4$ Ainsi, pour une particule caractérisée par une imulsion $\vec{p} = m\vec{v}$, l'égalité des normes de $\vec{P}$ donne $m^2c^4 = E^2 - p^2c^2$, cela donne la relation relativiste entre l'énergie de la particule en mouvement E et son impulsion $\vec{p}$, $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$. Là encore un DL en $\frac{v}{c} \ll 1$ redonne $E = mc^2 + \frac{p^2}{2m}$..

CdlS : Bien souligner l'importance de $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$

CdlS : En relativité, il n'y a pas nécessairement conservation de la masse mais toujours conservation de l'énergie ✍ *BFR p.262* . Par exemple pour la combustion du dihyfrogène, $\Delta E = -241\,\mathrm{kJ}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$ donc $\Delta m = \Delta E/c^2 = 2.68\cdot 10^{-12}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$ donc par exemple pour une mole ($m \sim 10\,\mathrm{g}$), la variation relative de masse est $\frac{\Delta m}{m} \sim 10^{-10}$ ce qui est heureusement très faible ! Donc en pratique on ne mesure pas comme ça de variation de masse.

Nous avons désormais étendu la définition de l'impulsion au cadre relativiste, mais qu'en est-il de ce diable de PFD ?

1.3 PFD Relativiste

Une première forme du PFD relativiste auquel on peut penser est $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ avec $\vec{F}$ l'ensemble des forces extérieures. L'idée de la relativité restreinte étant de travailler avec des formules invariantes par changement de référentiel, on pose **A GECHAN**

$$\vec{F'} = \gamma\vec{F} \quad \text{tel que} \quad \frac{d\vec{p}}{d\tau} = \vec{F'} \implies \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Si la particule n'est soumise qu'à la force $\vec{F}$, sa variation d'énergie vérifie

$$\frac{dE}{dt} = \vec{v}\cdot\vec{F}$$

Au vu de ces considérantions, on peut poser le quadri-vecteur $\vec{\mathcal{F}} = (\frac{\gamma}{c}\vec{v}\cdot\vec{F}, \vec{F})$ qui vérifie $\frac{d\vec{\mathcal{P}}}{d\tau} = \vec{\mathcal{F}}$

On vérifie alors bien que dans la limite classique $\gamma \to 1$, $\vec{p} = \gamma m\vec{v} \to m\vec{v}$ la partie spatiale du PFD relativiste redonne bien $\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}$, le PFD classique

CdlS : Autre façon de faire : on cherche une quadri-force $\tilde{F}$ telle que

$$\begin{aligned}
\tilde{F} &= \frac{\mathrm{d}\tilde{P}}{\mathrm{d}\tau} \\
\tilde{F} &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{E}{c}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\vec{p}\right) \qquad \text{avec} \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \gamma \\
\tilde{F} &= \left(\frac{\gamma}{c}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}, \gamma\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right) \\
\tilde{F} &= \gamma\left(\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}, \vec{f}\right)
\end{aligned}$$

Et on peut expliciter le terme temporel :

$$E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^2c^2 \implies 2E\mathrm{d}E = 2c^2\vec{p}\mathrm{d}\vec{p}$$
$$\implies \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = c^2\frac{\vec{p}}{E}\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

Avec $\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{f}$ et aussi $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$ et puis $E = \gamma mc^2$, ce qui donne finalement

$$\tilde{F} = \gamma\left(\frac{1}{c}\vec{f}\cdot\vec{v}, \vec{f}\right)$$

Le terme spatial est le PFD généralisé et le terme temporelle est le théorème de l'énergie cinétique généralisé !

> *Cette définition peut paraître un peu dure à utiliser, voyons quelques exemples d'applications et tout d'abord le plus simple d'entre eux : un système soumis à aucune force extérieure*

2 Collisions

CdlS : Inverser avec la partie suivante ?

On dit que deux particules entrent en collision lorsqu'elle subissent une variation de vitesse dans une zone quasi-ponctuelle de l'espace et en un temps infinitésimal. On distingue deux cas de collisions :

— les collisions élastiques qui conservent le nombre et la nature des particules

— les collisions inélastiques qui modifient l'état des particules : de nouvelles particules peuvent apparaître

2.1 Collisions élastiques

Hladik **TROUVER UN SCHEMA**

On considère deux particules 1 et 2 de même masse m. La particule 1 est au repos à l'origine du référentiel $\mathcal{R}$ et la particule 2 est animée d'une vitesse $\vec{v_i}$ selon l'axe Ox et vers la particule 1. La particule 2 est la particule incidente, donc nous noterons E_i et $\vec{p_i}$ ses énergie et impulsion avant la collision. Après la collision nous noterons E_1 (resp. E_2) l'énergie de la particule 1 (resp. 2) et $\vec{p_1}$ (resp. $\vec{p_2}$) l'impulsion de la particule 1 (resp.2).

On ne considère aucune force qui s'applique au système donc d'après le PFD relativiste la quantité de mouvement totale du système est conservée : $\vec{\mathcal{P}_i} = \vec{\mathcal{P}}_{1+2}$.

Hypothèse : Comme les particules ont la même masse on va considérer qu'après la collision leurs énergies sont égales, $E_1 = E_2 = E$ (pas forcément le cas en pratique).

Conséquence : on rappelle que l'on a $||\mathcal{P}||^2 = m^2c^4 = E^2 - c^2p^2$. Si on considére les énergies et les masses des particules 1 et 2 égales, alors on en tire $||\vec{p_1}|| = ||\vec{p_2}|| = p$.

Si l'on note θ_1 (resp. θ_2) l'angle entre $\vec{p_1}$ (resp. $\vec{p_2}$) et l'axe Ox, la conservation spatiale du quadri-vecteur impose $\vec{p_i} = \vec{p_1} + \vec{p_2}$, ce qui, projeté sur Ox donne $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ et $p_i = 2p\cos\theta$. La conservation de l'énergie se traduit par $E_i + mc^2 = 2E$.

On obtient alors le système suivant :

$$\vec{p_i} = \vec{p_1} + \vec{p_2}$$

$$E_i + mc^2 = 2E$$

En utilisant la définition de la pseudo-norme de $\vec{\mathcal{P}}$ $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$, on peut réécrire l'égalité des normes des impulsions :

$$\sqrt{\frac{E_i^2}{c^2} - m^2c^2} = 2\sqrt{\frac{E^2}{c^2} - m^2c^2}\cos\theta \quad \text{avec} \quad E = \frac{1}{2}(E_i + mc^2)$$

$$\sqrt{\frac{E_i^2}{c^2} - m^2c^2} = 2\sqrt{\left(\frac{(E_i + mc^2)}{2c}\right)^2 - m^2c^2}\cos\theta$$

On en tire

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{E_i + mc^2}{E_i + 3mc^2}}$$

Dans la limite classique, ie pour $\frac{v_1}{c} \ll 1$, on a $E_i \simeq mc^2$, on retrouve le résultat classique $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, soit $\theta = 45$, les deux trajectoires forment un angle droit.

Aux très grandes énergies, $E_i \gg mc^2$, θ tend vers 0 : pour une collision électron-électron avec $v_i = 0.97c$ on obtient $\theta = 30$ °.

Application à l'effet Compton : Collision photon en mouvement/électron au repos, on peut calculer la différence de longueur d'onde entre le photon incident et le photon dévié (sur transparent mais précisr que c'est le même principe). Qualitativement, l'électron gagne en impulsion donc, par conservation de l'impulsion totale, limpulsion du photon diminue et pour un photon $p = \frac{hv}{\lambda}$ ce qui correspond bien à une augmentation de la longueur d'onde.

CdlS : ✍ *Langlois p.65*

$$\lambda' - \lambda = \frac{2h}{m_e c}\sin^2\frac{\theta}{2}$$

2.2 Collisions inélastiques

BFR à lire

On considère un choc inélastique quelconque :

$$\mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_2 \rightarrow \mathrm{b}_1 + ... + \mathrm{b}_n$$

On se place naturellement dans le référentiel du centre de masse, il existe une énergie minimale correspondant au cas où toutes les particules sont au repos

$$E^*_{\text{tot}} \geq \sum_i m_{b,i}c^2$$

$$E_{a_1,\text{seuil}} = \frac{(\sum_i m_{b_i})^2 - m_{a_1}^2 m_{a_2}^2}{2m_{a_2}}c^2$$

Exemple 1

$$\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2 \rightarrow \Pi + \mathrm{D}$$

$$E_{p_1,\text{seuil}} = \frac{(m_\Pi + m_D)^2 - m_{p_1}^2 m_{p_2}^2}{2m_{p_2}}c^2$$

$$Ec_{p_1,\text{seuil}} = E_{p_1,\text{seuil}} - mc^2 = 295 \quad \text{MeV}$$

Nous allons étudier la collision

$$\Pi^- + p \to K^0 + \Lambda^0$$

qui est bien une collision inélastique car les particules ne sont pas les mêmes avant et après la collision (méson + proton → méson + baryon)

Nous allons déterminer l'énergie cinétique minimale nécessaire à la particule Π^- pour pouvoir réaliser la réaction. Nous cherchons à exprimer cette énergie $E_{\Pi^-} - E^0_{\Pi^-}$ dite *énergie de seuil de la réaction.*

Dans la référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire, le proton est immobile d'où $E_p = E^0_p$, et le pion une impulsion de norme p_{Π^-}, d'où par conservation de la norme de son quadri-vecteur associé

$$E_{\Pi^-}{}^2 - p^2_{\Pi^-}c^2 = {E^0}^2_{\Pi^-}$$

Si on s'intéresse maintenant au système $\{\Pi^- + p\}$, on peut écrire

$$(E_{\Pi^-} + E^0_p)^2 - c^2 p^2_{\Pi^-} = (E'_{\Pi^-} + E'_p)^2$$

Écrivons la conservation de l'énergie dans le référentiel $\mathcal{R}'$ du centre d'inertie des deux particules crées :

$$E'_{\Pi^-} + E'_p = E^0_{K^0} + E^0_{\Lambda^0} \quad \text{avec} \quad E^0_{K^0} = m_{K^0}c^2 \;\; \text{et} \;\; E^0_{\Lambda^0} = m_{\Lambda^0}c^2$$

D'après les équations (15) et (16) il vient

$$(E_{\Pi^-} + E^0_p)^2 - c^2 p^2_{\Pi^-} = (E^0_{K^0} + E^0_{\Lambda^0})^2$$

On injecte ensuite l'équation (14) pour avoir l'expression finale

$$E_{\Pi^-} = \frac{({E^0}_{K^0} + {E^0}_{\Lambda^0})^2 - ({E^0}^2_{\Pi^-} + {E^0}_{p^2}}{2{E^0}_p)}$$

Avec $m_{\Pi^-} = 139$ MeV/c^2, $m_p = 938,3$ MeV/c^2 , $m_{K^0} = 497,8$ MeV/c^2 et $m_{\Lambda^0} = 1115,6$ MeV/c^2, on trouve $E_{\Pi^-} = 907.6$ MeV d'où l'énergie de seuil de la réaction $E_{\Pi^-} - E^0_{\Pi^-} = 768$ MeV, soit 1.28×10^{-10} J.

Là il faut poser proprement le calcul pour déterminer à quelle vitesse ça correspond

On voit que pour créer de nouvelles particules on a besoin d'accélérer des particules à des très grandes vitesses, c'est le but des accélérateurs de particules, on va voit comment ça marche !

3 Mouvement d'un particule chargée dans un champ EM / Accélérateurs de particules

L'accélération de particules repose sur la création d'un champ électro-magnétique, voyons comment il agit sur la particule

3.1 Dans un champ électrique constant

On considère une particule de charge q dans un champ $\vec{\mathcal{E}}$ constant. On a, d'après le PFD relativiste,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{\mathcal{E}}$$

On se place dans le référentiel $\mathcal{R}$ dans lequel l'axe Ox coincide avec la direction du champ $\vec{\mathcal{E}}$. On suppose la vitesse initiale de la particule $\vec{v}_0$ selon Ox. On a

$$\frac{dp_x}{dt} = q\mathcal{E}$$

L'intégration donne

$$p_x = q\mathcal{E}t + p_{0x} = qEt$$

On a la relation $\vec{v} = \vec{p}c^2/E$, donc $v_x = p_x c^2/E$. E est défini par $E = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2}$. En combinant ces expressions, il vient

$$v(t) = \frac{cq\mathcal{E}t}{\sqrt{(mc)^2 + (q\mathcal{E}t)^2}}$$

Aux temps faibles on retrouve l'expression newtonienne $v(t) = q\mathcal{E}t/m$ et aux temps longs on tend vers c, **TRACER LA COURBE**

Aplication : Les accélérateurs linéaires, comme celui de Stanford de 3 km de long ! Il permet d'atteindre 99.999 999 2 % de c pour une énergie cinétique de 50 GeV

Parler plus des accélérateurs linéaires et des progrès qu'ils ont permis ?

> *Pour accéder à des énergies plus hautes il faut faire des accélérateurs plus longs (bof) ou on fait des accélérateurs non-linéaires= rôle du champ $\vec{B}$*

3.2 Dans un champ magnétique

Étudions l'effet d'un champ magnétique constant $\vec{B}$, le PFD donne

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

La force est constamment orthogonale à la vitesse donc la puissance de la force est nulle et l'énergie cinétique de la particule de la particule est constante, et donc la norme de sa vitesse aussi. Ainsi $\gamma(v) = \gamma$ est constant aussi

$$\frac{dm\gamma\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B} = \frac{qB}{m\gamma}\vec{v} \times \frac{\vec{B}}{B}$$

On pose $\omega_c = \frac{qB}{m\gamma}$ la pulsation cyclotron qui donne la valeur trouvé en mécanique classique pour $\gamma = 1$

CdlS : Il me semble que c'est plutôt

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega_C}{B}\vec{v} \times \vec{B}$$

Le mouvement prend une trajectoire circulaire uniforme.

Applications : Pour les accélérateurs de particules modernes, le principe est tout le temps le même : accélération des particules dans des portions rectilignes avec un $\vec{\mathcal{E}}$ constant et courbure de la trajectoire par un champ $\vec{B}$ constant ou pas !

CdlS : C'est le principe des synchrotons (comme le LHC par exemple) ou des cyclotrons (voir les pages wiki).

DONNER DES OdG

4 Autres effets relativistes

CdlS : J'aime pas trop les collisions, je préfère parler de truc plus cools...

4.1 Effet Doppler relativiste

✍ *Taillet* pour les rappels classiques
✍ *Semay*
✍ *Cette vidéo est franchement stylée*

En classique, on comprend que si par exemple une source s'éloigne d'un récepteur, la longueur d'onde reçue sera plus élevée... C'est ce qui se passe lorsqu'on parle du fameux "red-shift", témoin de l'extension de l'univers (la majorité des étoiles s'éloignent du système solaire). Mais est-ce si logique et naturel ? Après tout on parle de lumière donc on DOIT traiter le problème dans le cadre de la relativité !

Déjà reprenons l'effet Doppler classique. On imagine une source qui s'éloigne à une vitesse constante v du récepteur. Notons t_1 et $t_2 > t_1$ les instants d'émission de signal et T_1, T_2 les instants des réception :

$$\begin{cases} T_1 = t_1 + \dfrac{d}{c} \\ T_2 = t_2 + \dfrac{d + v\Delta t}{c} \end{cases} \implies \Delta T = (1+\beta)\Delta t$$

On a posé, avec c la vitesse de propagation de l'onde :

$$\Delta t = t_2 - t_1 \qquad \Delta T = T_2 - T_1 \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

En relativité on garde ce résultat, mais on doit également prendre en compte que la notion de temps n'est plus absolue ! On garde les mêmes notations pour la référentiel $\mathcal{R}$ du récepteur, mais on rajoute des ' pour les coordonnées dans $\mathcal{R}'$, le référentiel de la source :

$$\Delta T = (1+\beta)\Delta t = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{LP 06}}}{=} \underbrace{(1+\beta)}_{\text{classique}} \underbrace{\gamma}_{\text{relat}} \Delta t' = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\Delta t'$$

Alors on peut voir $\Delta t'$ la période d'une onde vu dans le référentiel de la source :

$$f_{source} = \frac{1}{\Delta t'}$$

Alors la fréquence vue par le récepteur est telle que

$$\boxed{f_{rec} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\, f_{source} < \frac{f_{source}}{1-\beta}}$$

Doppler relativiste = Doppler classique + dilatation du temps

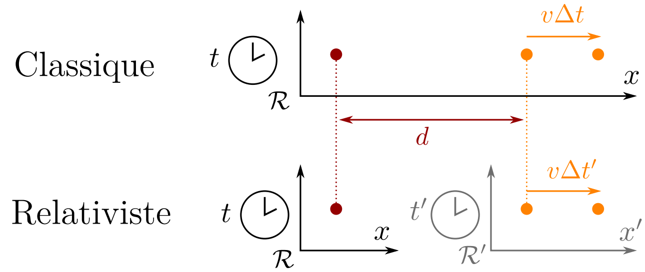

FIGURE 4.1 – L'effet DOPPLER relativiste prend en compte la dilatation du temps

Notons que l'on pouvait obtenir plus rapidement ce résultat à partir des quadri-vecteurs : pour un photon, on a

$$E = \hbar\omega \qquad \vec{p} = \hbar\vec{k}$$

Donc on peut définir un nouveau quadri-vecteur "pulsation-vecteur d'onde" au quadrivecteur énergie-impulsion pour un photon :

$$\begin{pmatrix} \omega/c \\ \vec{k} \end{pmatrix} = \frac{1}{\hbar}\mathcal{P}$$

Donc il s'agit d'un quadri-vecteur contravariant qui se transforme comme n'importe quel quadri-vecteur contravariant sous LORENTZ :

$$\begin{pmatrix} \omega/c \\ \vec{k} \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} \omega'/c \\ \vec{k}' \end{pmatrix}$$

Alors ω' est la pulsation de la source dans son référentiel $\mathcal{R}'$ et ω est la pulsation reçue par le récepteur dans $\mathcal{R}$. On a bien la même relation au final :

$$\omega = \gamma\omega' - \beta c\gamma k' \underset{\substack{\uparrow \\ k'=\omega'/c}}{=} \gamma(1+\beta)\omega' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,\omega'$$

On remarque que pour de faibles vitesses, à l'odre 1 en β, on a $\gamma = 1$ donc on retombe sur la même formule qu'en classique.

Relation de (non)-dispersion

Au passage, en prenant la norme du ce "quadri-vecteur d'onde", on trouve

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \vec{k}^2 = \frac{1}{\hbar}\mathcal{P}^\mu\mathcal{P}_\mu = \left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2 = 0$$

Car comme on l'a vu pour un photon $m = 0$. On retrouve bien la relation linéaire $\omega = |\vec{k}|c$.

Interprétation

Donc pour une étoile qui s'éloigne, on verra $\beta > 0 \implies f < f_{source}$ donc $\lambda > \lambda_{source}$ d'où un décalage vers le rouge !

Cas limite

On remarque que, comme dans l'effet classique, la fréquence tend vers l'infini si $\beta = -1$, ce qui correspond au franchissement du mur du son (ou "mur de lumière" cf. effet CHERENKOV ✍ *Hladik*). Par contre si la source s'éloigne à la vitesse de l'onde, alors que la fréquence est simplement divisée par 2 dans le cas classique. Dans le cas relativiste, la fréquence reçue est nulle ! Ceci traduit le fait qu'on ne pourra jamais recevoir de signal d'un corps s'éloigantn à la vitesse de la lumière... Ceci est caché dans le terme $\gamma \xrightarrow{+} \infty$ de la dilatation du temps.

4.2 Aberrations

✍ *Semay p.181*

Un truc stylé qui fait que quand tu voyages dand un vaisseau, tu vois les étoiles avec un angle plus faible !

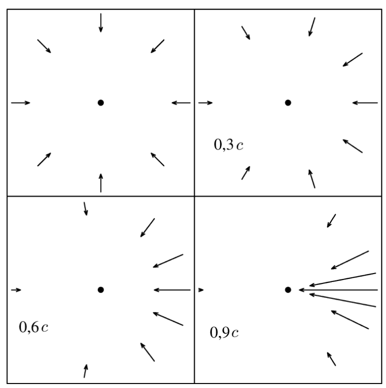

FIGURE 4.2 – Styléééé

4.3 Effet CHERENKOV

✍ *Hladik*