

LP04 - Précession dans les domaines macroscopique et microscopique

Cléments (DE LA SALLE et COLLÉAUX)

15 juin 2020

Niveau : L3

Bibliographie

- ♣ *Mécanique, fondements et applications*, Pérez
- ♣ Les astuces de FEYNMANN
- ♣ *Physique quantique : fondements*, Le Bellac, Oscillations de RABI pour la RMN p.164
- ♣ vidéo
- ♣ vidéo
- ♣ vidéo
- ♣ vidéo de la RMN

Prérequis

- Théorèmes de Méca
- MQ (à préciser)
-
-

Expériences



Table des matières

Table des matières	1
1 Précession d'une toupie	2
1.1 Motivation	2
1.2 Positionnement : angles d'Euler	3
1.3 Approximation gyroscopique et précession de la toupie	3
2 Moment cinétique de l'électron	5
2.1 Approche semi-classique	5
2.2 Effet d'un champ \vec{B} uniforme	6
2.3 Effet d'un champ \vec{B} tournant	7

Introduction

Les mouvements de rotations sont partout (rotation de la Terre sur elle-même, toupie, atome...) leur dynamique est très complexe mais peut-être simplifiée dans certains cas. Notamment les nombreuses analogies qui existent entre les différents domaines de la physique (et que nous allons illustrer) nous permettent un traitement plus efficace des problèmes.

Ici nous allons nous intéresser à un mouvement particulier de rotation : le mouvement de précession.

1 Précession d'une toupie

1.1 Motivation

On a tous déjà fait l'expérience avec une toupie : en la lançant avec un certain défaut de verticalité, en plus de sa rotation principale autour de son axe, ce même axe lui tourne également plus lentement autour de l'axe verticale.

<https://www.youtube.com/watch?v=L8pH6fww0Yc>

Définition : Précession

Ce genre de mouvement, où l'axe de rotation tourne lui-même autour d'un autre axe est appelé **précession**. Il est caractérisé mathématiquement par une équation du type

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}$$

Où \mathbf{A} est le vecteur qui précesse autour de $\boldsymbol{\Omega}$

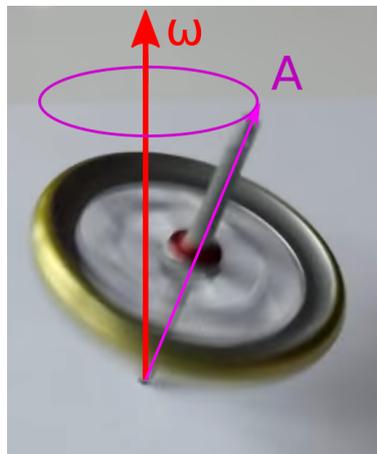


FIGURE 1.1 – Dans ce cas, \mathbf{A} est la rotation de la toupie.

Dans ce genre de mouvement, \mathbf{A} décrit un cercle perpendiculaire à $\boldsymbol{\Omega}$. En effet en projetant l'équation selon \mathbf{e}_z (prenons $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_z$), on a

$$\dot{A}_z = 0$$

Ce qui veut dire que \mathbf{A} décrit une trajectoire dans un plan orthogonal à \mathbf{e}_z . De plus, les projections sur les deux autres axes donnent bien une trajectoire circulaire :

$$\begin{cases} \dot{A}_x = -\Omega A_y \\ \dot{A}_y = \Omega A_x \end{cases} \implies \begin{cases} A_x = r \cos \Omega t \\ A_y = r \sin \Omega t \end{cases}$$

1.2 Positionnement : angles d'Euler

✎ Pérez, *Mécanique fondements et applications*, p.407

On cherche maintenant à formaliser le problème. On considère un solide, libre de tourner dans toutes les directions de l'espace. On peut alors lui associer des angles qui définissent sa position et appelés **angles d'Euler**

Définition : Angles d'Euler

Les angles portent des jolis petits noms (dont on reconnaîtra l'un d'eux puisqu'il est dans le titre de la leçon OMG)

- **Angle de précession** autour de z : ψ
- **Angle de nutation** autour de u : θ
- **Angle de rotation propre** autour de z' : φ

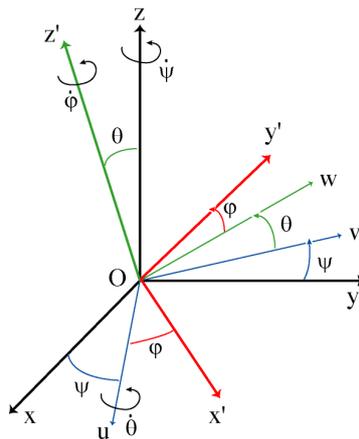


FIGURE 1.2 – Les angles d'Euler sont définis afin de caractériser toutes les rotations possibles. On peut montrer en live sur le gyroscope ou bien sur cette animation :

<https://demonstrations.wolfram.com/EulerAnglesPrecessionNutationAndSpin/popup1>

On peut alors décomposer le vecteur vitesse de rotation Ω selon les vecteurs :

$$\Omega = \dot{\psi} \mathbf{e}_z + \dot{\theta} \mathbf{u} + \dot{\varphi} \mathbf{e}'_z$$

Jusque là, on n'a pas fait de lien avec la précession de la toupie... On va donc voir dans quel cadre se situer pour retrouver ce mouvement !

1.3 Approximation gyroscopique et précession de la toupie

Définition : Approximation gyroscopique

Dans cette approximation, on suppose que l'une des composantes du moment cinétique est très grande devant les autres. Dans le cas de la toupie, le moment cinétique en O , le point de contact avec le sol, s'écrit

$$\mathbf{L}_O = I\boldsymbol{\Omega} \underset{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{symétrie}}}{=} \begin{pmatrix} I_u \Omega_u \\ I_u \Omega_w \\ I_{z'} \Omega_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_u \dot{\theta} \\ I_u \dot{\psi} \sin \theta \\ I_{z'} (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \end{pmatrix} \underset{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{App. gyr.}}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{z'} \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

Ainsi, pour négliger des termes il faut des conditions sur les vitesses de rotation **ET** sur les composantes du tenseur d'inertie.

Exemple de la toupie

On veut pouvoir écrire $\mathbf{L} = L \mathbf{e}_{z'}$ il faut donc vérifier les conditions

$$\begin{cases} |\dot{\varphi}| \gg |\dot{\theta}|, |\dot{\psi}| \\ I_{z'} \gg I_u \end{cases}$$

La condition sur les vitesses de rotation est facilement vérifiée puisqu'on lance la toupie uniquement suivant son axe de rotation propre. La condition sur les moments d'inertie impose une certaine forme : en notant H sa hauteur (suivant z') et R son rayon typique, on a

$$\frac{I_{z'}}{I_u} \gg 1 \implies \frac{mR^2}{mH^2} \gg 1 \implies R^2 \gg H^2$$

Il faut donc une toupie plutôt large et basse, ce qui correspond à l'intuition qu'on peut se faire.

Cette situation correspond bien à celle de la toupie qu'on lance avec une grande vitesse de rotation propre (et sans autre vitesse de rotation a priori). On applique alors directement le théorème du moment cinétique (dans le référentiel fixe $(Oxyz)$, en supposant que seule la gravité exerce un moment sur la toupie (contact parfait et réaction du support qui a un moment nul)) :

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{OG} \times m\mathbf{g}$$

On note l la distance de G au point de contact O : $\mathbf{OG} = l\mathbf{e}'_z$. De plus, dans l'approximation gyroscopique, on a vu qu'on pouvait écrire

$$\mathbf{L} \sim I_{z'} \dot{\varphi} \mathbf{e}_{z'}$$

Et ainsi l'équation devient une équation de précession !

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \underbrace{\frac{mgl}{I_{z'} \dot{\varphi}}}_{\Omega} \mathbf{e}_z \times \mathbf{L}$$

Où Ω est la pulsation de précession. C'est donc la gravité qui est entièrement à l'origine de cette précession !

Remarques

- C'est le déséquilibre de la toupie (par la gravité) qui est à l'origine du mouvement de précession
- On peut remarquer visuellement qu'on a bien $|\dot{\varphi}| \gg |\dot{\psi}|$
- Le vecteur vitesse de rotation est parallèle au forçage.
- On peut prévoir le sens de la dérive : il faut appliquer la règle de la main droite avec le pouce : $\mathbf{e}_{z'}$, l'index : \mathbf{F} la force (ici $m\mathbf{g}$) et le majeur donne la direction de la déviation).

Manip' : Précession d'un gyroscope déséquilibré

On illustre le phénomène précédent avec le gyroscope, sur lequel on attache un petit poids... On prévoit le sens de la précession grâce aux considérations précédentes (on peut même montrer que la précession change de sens quand on soulève le poids)

- On vient a priori de montrer un résultat paradoxal : une force qui déséquilibre une toupie créera une déviation orthogonale à elle-même ! Ce résultat qui peut paraître déroutant est parfois connu sous le nom de **paradoxe gyroscopique**.

| Blablabla le macro c'est trop facile et tout le monde sait qu'un atome c'est un peu comme un gyroscope...

2 Moment cinétique de l'électron

✦ Perez, p.443

2.1 Approche semi-classique

Dans cette approche semi-classique, on considère que l'électron, représenté par le point P , est en **orbite circulaire de rayon** R autour d'un noyau fixe O . On peut alors assimiler sa trajectoire à une boucle de courant. On a donc un dipôle magnétique de moment magnétique $\vec{\mu}$. On associe un repère $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_{z'})$. Voir le schéma réalisé sur Ink.

C'est le moment de déterminer ce moment magnétique $\vec{\mu}$! Comme on assimile la trajectoire de l'électron à une boucle de courant de surface S d'intensité I , on a :

$$\vec{\mu} = IS \vec{e}_{z'}$$

I est calculé comme $I = \frac{q}{T}$ avec $q = -e$ et $T = 2\pi R/v$ la période de révolution (on a noté v la vitesse de l'électron). On écrit facilement $S = \pi R^2$. Il vient alors

$$\vec{\mu} = \frac{-evR}{2} \vec{e}_{z'}$$

Comme on a un objet en révolution autour d'un axe fixe, on peut calculer un moment cinétique comme on l'a déjà fait en mécanique képlérienne. Par définition, on a :

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \vec{OP} \times m\vec{v} \\ \vec{L}_O &= Rmv (\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta) \end{aligned}$$

$$\vec{L}_O = Rmv \vec{e}_{z'}$$

On remarque alors que les moments magnétique $\vec{\mu}$ et cinétiques \vec{L}_O sont liés :

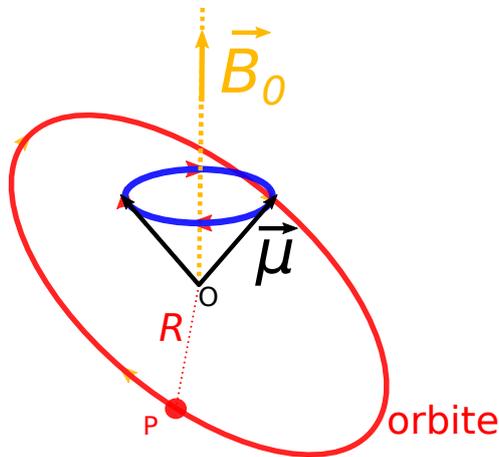
$$\vec{\mu} = \frac{-e}{2m} \vec{L}_O = \gamma \vec{L}_O \quad (2.1)$$

Cette relation qui lie les aspects cinétique et électromagnétique de l'électron fait apparaître γ le rapport gyromagnétique de l'électron

$$\gamma = \frac{-e}{2m} = -8.8 \times 10^{10} \text{ T}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

2.2 Effet d'un champ \vec{B} uniforme

Compliquons le problème en appliquant un champ extérieur $\vec{B} = B\vec{e}_z$ stationnaire et uniforme. On suppose toujours que la trajectoire de l'électron est circulaire. Voir schéma v2.



Le théorème du moment cinétique écrit en O dans le référentiel $\mathcal{R}(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ supposé galiléen s'écrit :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad (2.2)$$

En utilisant l'équation? on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{\mathcal{R}} &= -\gamma \vec{L}_O \times \vec{B} \\ \left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{\mathcal{R}} &= \vec{\Omega}_P \times \vec{L}_O \end{aligned} \quad (2.3)$$

On a noté $\vec{\Omega}_P = \frac{e}{2m} \vec{B}$ le vecteur vitesse de précession et on remarque qu'on retrouve bien une équation de précession de la forme déjà établie.

Étudions le mouvement qui correspond à cette équation !

— **conservation de la norme du moment cinétique** : on multiplie scalairement l'équation de précession par le moment cinétique \vec{L}_O .

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \cdot \vec{L}_O = 0 = \left(\frac{d \|\vec{L}_O\|^2}{dt} \right)_{\mathcal{R}}$$

— **conservation de la composante de \vec{L}_O selon \vec{e}_z** : on multiplie scalairement l'équation de précession par \vec{e}_z et comme \vec{L}_O est aussi selon \vec{e}_z , on a :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \cdot \vec{e}_z = 0 = \left(\frac{dL_O^z}{dt} \right)_{\mathcal{R}}$$

— nature du mouvement : au vu des deux considérations ci-dessus, le vecteur \vec{L}_O décrit un cône de sommet O , d'axe (Oz') , c'est donc bien une **précession** ! Schéma !

Remarques sur la vitesse de rotation

Le vecteur vitesse de rotation est **colinéaire au forçage**, ici le vecteur \vec{B} , **A METTRE EN REFERENCE A CE QUI A DEJA ETE FAIT**

Pour un B de 1 T (ce qui est déjà pas mal), regardons l'OdG de $\|\vec{\Omega}_P\| \simeq 10^{11} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Ce vecteur traduit la pulsation associée à la rotation de \vec{L}_O (ou $\vec{\mu}$) autour de l'axe (Oz') . On peut comparer cette pulsation à la pulsation associée au mouvement orbital de l'électron ω_{orbite} :

$$\omega_{\text{orbite}} = \frac{v}{R} = \frac{v}{a_0} = w \frac{10^6}{50 \times 10^{-12}} = 10^{27} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

On a alors $\|\vec{\Omega}_P\| \ll \omega_{\text{orbite}}$, le mouvement de précession du moment cinétique de l'électron se fait de façon très lente comparé à son mouvement circulaire. En particulier, cela confirme l'hypothèse que l'électron reste sur une orbite circulaire, malgré la présence du champ magnétique extérieur.

2.3 Effet d'un champ \vec{B} tournant

On applique désormais un champ magnétique de la forme :

$$\vec{B} = \underbrace{B_0 \vec{e}_z}_{\vec{B}_0, \text{ champ uniforme}} + \underbrace{B_1 (\cos \omega t \vec{e}_x + \sin \omega t \vec{e}_y)}_{\vec{B}_1, \text{ champ tournant dans le plan } xOy}$$

On s'intéresse encore à l'électron dont la trajectoire est assimilée à une boucle de courant et de moment magnétique $m\vec{u}$. Le référentiel d'étude est toujours \mathcal{R} et on notera \mathcal{R}' le référentiel tournant à $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ autour de $\mathcal{R}(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et qui suit donc le champ \vec{B} . On notera que ce référentiel **n'est pas galiléen** !

On applique le TMC à l'électron, dans \mathcal{R} , par rapport à O :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{\mathcal{R}} &= \vec{\mu} \times \vec{B} \\ \left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{\mathcal{R}} &= -\gamma (\vec{B}_0 + \vec{B}_1) \times \vec{L}_O \end{aligned} \tag{2.4}$$

On utilise maintenant la formule de changement de référentiel pour la dérivation :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + (\omega \vec{e}_z) \times \vec{L}_O \tag{2.5}$$

En combinant les équations (2.4) et (2.5), on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} &= - \left(\gamma \vec{B}_0 + \gamma \vec{B}_1 + \vec{\omega} \right) \times \vec{L}_O \\ \left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} &= (\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1 - \vec{\omega}) \times \vec{L}_O \\ \left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} &= \vec{\Omega}'_P \times \vec{L}'_O \end{aligned}$$

où on a noté $\vec{\Omega}'_P = \vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1 - \vec{\omega}$. On remarque qu'on retrouve une équation de précession (vous êtes surpris hein ?)

Le mouvement est donc le même que précédemment **dans le référentiel tournant**. Il y a quand même un avantage à travailler avec un champ tournant : lorsque $\omega = \omega_0$ (on rappelle que ω est la pulsation de rotation du champ tournant et ω_0 est proportionnel à la composante uniforme de ce champ, cette condition est donc possible à obtenir), on a $\vec{\Omega}'_P = \vec{\omega}_1$. Dans ce cas, la précession se fait autour de la partie tournante de \vec{B} , comme si la partie uniforme n'existait pas. On appelle cette condition la **condition de résonance**. Quand la résonance est atteinte, l'égalité des vecteurs vitesse de rotation s'écrit $\gamma = -\frac{\omega}{B_0}$. À la résonance on peut donc obtenir la valeur de γ .

Application à la spectroscopie RMN

Découverte en 1946 par E. Purcell et F. Bloch (oui le Bloch des ondes de Bloch), la spectroscopie RMN utilise cette condition de résonance pour déterminer les structures de molécules. Les moments magnétiques étudiés sont ici **ceux des noyaux**. Le champ statique $|\vec{B}_0|$ est de quelques T. Pour une pulsation ω du champ tournant choisie au hasard, les moments magnétiques précessent autour de \vec{B}_0 . La pulsation ω est ensuite modifiée pour obtenir la condition de résonance où les moments magnétiques changent d'axe de précession. L'égalité $\gamma = -\frac{\omega}{B_0}$ permet alors de connaître γ que l'on sait relié au voisinage protique du noyau.

Questions

Différence fondamentale entre le gyroscope et la toupie ? Toupie : précession due à la gravité
Pas de précession pour le gyroscope

Pourquoi le gyroscope est-il plat ?

Terre : Pourquoi y a-t-il précession ? Période de précession ? Terre pas sphérique (force centrifuge)

Qu'est-ce que les forces de marée ?

Est-ce que vous connaissez d'autres types de précession ? Précession de Thomas, précession de Lenses-Thirring, précession de l'orbite de Mercure

Gyroscope dans les téléphones portables ? Gyroscope optique (effet Sagnac)

Pourquoi un tenseur d'inertie est-il symétrique ?

Instabilités quand on fait tourner les solides

— Dans le calcul du moment magnétique de l'électron, à quelle condition peut-on approximer l'orbite de l'électron à une spire circulaire ? — L'équation de précession pour le domaine microscopique nécessite-t-elle l'approximation gyroscopiques pour être établie ? — Est-ce que la RMN est un problème classique ou quantique ? — Que devient la relation $\mu = \gamma L$ lorsque l'on passe en mécanique quantique ? — Quels sont les différents types de moments cinétiques en mécanique quantique (orbital et de spin) ? Qu'est-ce que le facteur de Landé ? — Que se passe-t-il à la résonance en RMN ? — Que peut-on conclure en prenant le produit scalaire de l'équation du mouvement (exacte) de la toupie avec le vecteur e_z ? — Quelle importance a le fait que l'approximation gyroscopique fasse intervenir les moments d'inertie du solide ? — Quelle est la géométrie la plus adaptée pour faciliter la validité de l'approximation gyroscopique ? Est-ce qu'une tige longue et fine ferait une bonne toupie ? — Quel est le principe d'un gyroscope ? — Comment faire pour que le poids ait un moment dynamique nul ? — Qu'est-ce que l'effet paradoxal ? Que se passe-t-il lorsque l'on penche une roue de vélo en rotation ?

Quelle est la différence entre jour sidéral et jour terrestre ? Expliquer le phénomène des saisons. Pourquoi parle-t-on de résonance magnétique, en quoi est-ce une résonance, pourquoi cette condition est appelée résonance ? Quelles sont les autres forces qui s'appliquent sur la toupie ? Pourquoi leurs moments sont nuls ? Pourquoi la toupie s'arrête ? Comment se traduisent les frottements dans le TMC, si on les prenait en compte ? L'équation gyroscopique n'apparaît pas dans la partie I (Cas de la toupie), pourquoi ? (choix pédagogique, elle est là quand même, il faut juste changer de référentiel). Quelle correction quantique faudrait-il rajouter dans le modèle présenté de la RMN ?

Pourquoi en résonance magnétique le champ fixe est plus intense que le champ tournant ? Pourquoi la sensibilité dépend du champ fixe ? C'est quoi la sensibilité ? Quelles origines du moment cinétique ? La résonance magnétique du neutron existe-t-elle ? Dans le cas du proton, le moment magnétique est-il orbitalaire comme vous l'avez présenté avec le modèle de Bohr ? Pour le proton, de quoi dépend le facteur gyromagnétique ? Expliquer la précession des équinoxes. Pour la résonance magnétique, quel phénomène se passe quand la pulsation est environ égale à la pulsation de Larmor ? Pour la toupie, y a-t-il que le poids comme force ? Pourquoi on ne prend pas en compte la réaction du support dans les calculs ? Quels types de frottement qui fait que la toupie tombe ?

Comment on définit formellement le référentiel propre d'inertie ? Pour un solide quelconque ? Vous avez étudié la toupie comme en contact ponctuel fixe avec le sol, pourquoi la toupie se déplace-t-elle en réalité ? Pourquoi la toupie finit par tomber ? Qu'est-ce qu'il se passe si le support de la toupie est accéléré (par exemple dans un ascenseur, ou en chute libre) ? Sur la résolution du mouvement de Poincaré d'un solide, vous avez exhibé des solutions particulières, quelles sont les solutions générales ? Pouvez-vous revenir sur le mouvement de précession de la Terre ? (partie expédiée en raison du manque de temps et peu claire) Vous avez dit que le gyroscope permettait de mettre en évidence le caractère

non galiléen du référentiel terrestre, comment exactement ? Est-ce que c'est possible d'étudier des mouvements hors du cadre de l'approximation gyroscopique ? Par exemple ? Par rapport à l'expérience d'Einstein et de Haas, vous avez dit que la valeur du rapport gyromagnétique mesurée n'était pas en accord avec le modèle semi-classique et qu'il fallait faire appel à des modèles quantiques, pouvez-vous expliciter ? Qu'est-ce qu'on mesure exactement en RMN ? Comment on effectue cette mesure en pratique ?

Application du gyro dans le domaine maritime (en lien avec l'expression du couple gyroscopique) ? Dans bateau, quelle partie du gyro (que j'avais montré) serait elle relié à la coque ? Garder le cap, quel domaine est ce utilisé ? (les avions de chasse notamment, système de rétroaction). Sur un échelle de temps de 24h, qu'observe t on si on maintient la rotation du gyro ? sur un an ? Pour la RMN, quel type de particule est étudiée ? (les protons H). Autre type de moment cinétique ? (orbitaire). Influence des voisins ? couplage, décalage en fréquence. Résolution typique d'un spectro RMN pour la détermination de la fréquence ? Intérêt de faire varier le champ B0 plutôt que f ? (les équations sont les mêmes, juste plus simple a réaliser).

Matériau para, plonge dans champ B et acquiert une aimantation induite. Pourquoi, alors qu'on a vu que ça ne devrait que faire précéder les moments magétiques autour de la direction du champ ? (pas de réponse). Comment a partir de l'expression de l'état initial, on obtient l'état au temps t ? (application de l'opérateur évolution)

Hypothèse pour écrire proportionnalité entre moments magnétiques et cinétique ?

Cet proportionalité est vrai pour un niveau donné :

$$\mathbf{M} = g_J \mu_B \mathbf{J}$$

Avec g_J paramétré par J ! Donc chaque état vérifie la proportionnalité mais le facteur n'est pas nécessairement le même pour chaque état. *🚩 du Trémollet de Lacheisserie, Magnétisme 1 p.256*